MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B

SOLUZIONI COMPITINI DI RECUPERO

PROF. MARCO ABATE

11 aprile 2007

1. Recupero Primo Compitino

1.1. Primo Compitino, Prima Parte.

Esercizio 1.1. *Lunedì il prezzo della benzina al distributore è salito del* 10% *rispetto al prezzo del sabato precedente. Mercoledì il prezzo della benzina si riabbassa del* 10% *rispetto al prezzo di lunedì. Rispetto a sabato, il prezzo della benzina è aumentato, diminuito o rimasto costante? Perché?*

Indicando con P_S, P_L e P_M rispettivamente i prezzi della benzina il sabato, il lunedì e il mercoledì, si ha

$$P_L = \left(1 + \frac{10}{100}\right) P_S = 1.1 P_S,$$

$$P_M = \left(1 - \frac{10}{100}\right) P_L = 0.9 P_L = 0.99 P_S.$$

Pertanto il prezzo della benzina è diminuito dell'1% da sabato a mercoledì.

Esercizio 1.2. *Hai misurato (in modo approssimato) due quantità* x *ed* y*, ottenendo i valori* $1.98 < x < 2.02$ *e* $4.95 < y < 5.05$*. Qual è il valore stimato e l'errore assoluto del prodotto* $x \cdot y$*?*

Calcoliamo innanzitutto valore stimato e errori assoluto e relativo di x e y.

$$\overline{x} = \frac{1.98 + 2.02}{2} = 2, \quad e_{A,x} = \frac{2.02 - 1.98}{2} = 0.02, \quad e_{R,x} = \frac{e_{A,x}}{\overline{x}} = 1\%,$$

$$\overline{y} = \frac{4.95 + 5.05}{2} = 5, \quad e_{A,x} = \frac{5.05 - 4.95}{2} = 0.05, \quad e_{R,x} = \frac{e_{A,x}}{\overline{x}} = 1\%.$$

Gli errori relativi sono piccoli, pertanto possiamo prendere come valore medio del prodotto il prodotto dei valori medi e come errore relativo del prodotto la somma degli errori relativi:

$$\overline{x \cdot y} = 10, \quad e_{R,x\cdot y} = 2\%, \quad e_{A,x\cdot y} = \overline{x \cdot y} \cdot e_{R,x\cdot y} = 0.2.$$

Esercizio 1.3. *Lanci tre monete non truccate. Qual è la probabilità di ottenere tre teste?*

I tre lanci sono indipendenti, pertanto la probabilità è data dal prodotto delle probabilità di ottenere testa in ogni lancio. La probabilità di ottenere testa in un lancio è $\frac{1}{2}$, dato che le monete non sono truccate. Pertanto $P = \frac{1}{8}$.

1.2. **Primo Compitino, Seconda Parte.**

Esercizio 1.4. *Due ditte, la "Rose Rosse" (per brevità RR) e la "Viole Viola" (per brevità VV) si spartiscono il mercato dei fiori a Pisa.*

(1) *Nel febbraio 2006 la RR ha venduto a Pisa il* 70% *dei fiori per San Valentino. Sapendo che in totale sono stati venduti* 5000 *fiori, quanti fiori per San Valentino sono stati venduti a Pisa dalla VV nel 2006?*
(2) *Sapendo che nel febbraio 2006 entrambe le ditte avevano prodotto ciascuna* 4000 *fiori, quale percentuale dei fiori prodotti dalla ditta RR è rimasta invenduta? E per la ditta VV?*
(3) *Nel febbraio 2007 le due ditte hanno nuovamente prodotto lo stesso numero di fiori. Sapendo che i fiori venduti in totale sono aumentati del* 20% *rispetto all'anno precedente, e che la ditta RR ha venduto tutti i suoi fiori, che percentuale di fiori invenduti ha avuto la ditta VV?*
(4) *La percentuale di fiori venduti dalla ditta RR rispetto al totale è aumentata o diminuita (o rimasta costante) rispetto all'anno precedente?*

(1) VV ha venduto il $100\% - 70\% = 30\%$ dei fiori, ovvero $5000 \cdot \frac{30}{100} = 1500$ fiori.

(2) I fiori invenduti da VV sono 2500, ovvero il $\frac{2500}{4000} = 62.5\%$ dei fiori prodotti. La RR ha venduto i restanti 3500 fiori. Pertanto la percentuale di fiori invenduti della RR è $\frac{500}{4000} = 12.5\%$.

(3) I fiori venduti nel febbraio 2007 sono $5000(1 + 0.2) = 6000$. La RR ne ha venduti 4000. Pertanto la VV ha venduto 2000 fiori e non ne ha venduti 2000, ovvero il $\frac{2000}{4000} = 50\%$.

(4) La percentuale di fiori venduti da RR rispetto al totale è $\frac{4000}{6000} = 66.\overline{6}\%$, minore rispetto all'anno precedente.

Esercizio 1.5. *Ti hanno rubato il cellulare, fortunatamente dotato di codice PIN (formato da 4 cifre numeriche). Qual è la probabilità che il ladro riesca ad indovinare il codice,*

(1) *non avendo nessuna informazione?*
(2) *sapendo che la prima cifra del codice è* 0*?*
(3) *sapendo che una cifra (e una sola cifra) del codice è* 0*?*
(4) *sapendo che le cifre sono* $0, 1, 2, 3$*, ma non sapendo l'ordine?*
(5) *sapendo che le cifre sono* $2, 2, 3, 9$*, ma non sapendo l'ordine?*

(1) I numeri da 0000 a 9999 sono $10000 = 10^4$ (opppure: per ogni cifra ho 10 possibilità... 10^4 possibilità in totale). $P = \frac{1}{10^4}$.

(2) I numeri da 0000 a 0999 sono $1000 = 10^3$ (oppure: per la prima cifra ho un'unica possibilità, per ognuna delle altre tre...). $P = \frac{1}{10^3}$.

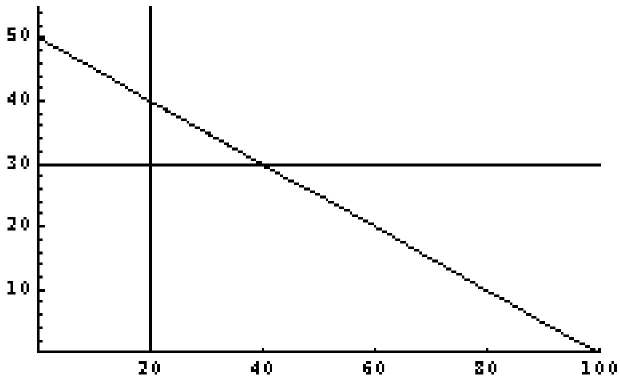
(3) Per decidere quale cifra del codice è 0 abbiamo 4 possibilità. Ognuna delle altre cifre può essere scelta in 9 modi diversi (le cifre tra 1 e 9). Pertanto i codici possibili sono $4 \cdot 9^3$ e $P = \frac{1}{4 \cdot 9^3}$.

(4) Lo 0 può stare in 4 posti, l'1 in uno dei 3 rimanenti... I codici possibili sono $4! = 24$ e $P = \frac{1}{24}$.

(5) Il 3 può stare in 4 posti possibili, il 9 in uno dei 3 rimanenti e gli ultimi due spazi hanno obbligatoriamente dei 2. Pertanto i codici possibili sono $4 \cdot 3 = 12 = \frac{4!}{2!}$ (perché?) e $P = \frac{1}{12}$.

Esercizio 1.6. *Devi comprare due reagenti, A e B, per i tuoi esperimenti di laboratorio. Un grammo del reagente A costa* 5 *Euro, un grammo del reagente B costa* 7 *Euro. Ti servono almeno* 20 g *del reagente A e* 30 g *del reagente B. Nell'armadietto dei reagenti hai* 100 cm^3 *di spazio da destinare totalmente ai reagenti che* *comprerai. Sapendo che* 1 g *di reagente A occupa* 1 cm^3 *di spazio e* 1 g *di reagente B occupa* 2 cm^3 *di spazio, che ordine devi effettuare per riempire totalmente i* 100 cm^3 *a tua disposizione e spendere il meno possibile? Quanto spendi?*

Indichiamo con x i grammi comprati del reagente A e con y i grammi comprati del reagente B. Le condizioni da soddisfare sono:
(a) $x \geq 20$;
(b) $y \geq 30$;
(c) $x + 2y = 100$ (spazio occupato dai reagenti).
Le condizioni sono rappresentate graficamente in figura.



La funzione costo da minimizzare è $C(x, y) = 5x + 7y$. Il segmento su cui minimizzarla ha per estremi i punti $(20, 40)$ e $(40, 30)$. Il minimo giace su uno degli estremi. Si ha $C(20, 40) = 380$ (Euro) e $C(40, 30) = 410$ (Euro). Pertanto conviene comprare 20 g di reagente A e 30 g di reagente B, spendendo 380 Euro.

2. Recupero Secondo Compitino

2.1. Secondo Compitino, Prima Parte.

Esercizio 2.1. *La funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *data da* $f(x) = x^2$ *è invertibile?*

Una funzione è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva. La funzione data non è iniettiva in quanto $f(2) = f(-2) = 4$. Pertanto f non è invertibile.

Esercizio 2.2. *La mediana di quattro numeri reali può essere maggiore del massimo dei quattro numeri?*

Dati quattro numeri reali, possiamo ordinarli $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. La mediana dei quattro numeri è $\frac{x_2+x_3}{2}$, che è compresa fra x_2 e x_3 (vedi soluzione del secondo compitino "la media di n numeri reali è sempre compresa tra massimo e minimo"), e pertanto è minore o uguale a x_4.

Esercizio 2.3. *Per i punti* $(1, 2)$, $(2, 5)$ *e* $(4, 11)$ *passa una retta? Se sì quale, se no perché?*

Per due punti passa una e una sola retta. Consideriamo la retta passante per i primi due punti. Se questa passa anche per il terzo, ci siamo; altrimenti nessuna retta passa per i tre punti. Consideriamo la retta $y = ax + b$. Le condizioni che passi per i primi due punti danno

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b \\ 5 = a \cdot 2 + b \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Pertanto la retta passante per i primi due punti ha equazione $y = 3x - 1$. Siccome $11 = 4 \cdot 3 - 1$, questa retta passa anche per $(4, 11)$, e la risposta alla domanda è positiva.

2.2. **Secondo Compitino, Seconda Parte.**

Esercizio 2.4. *Misuri l'altezza di un albero in funzione del tempo. Quando hai iniziato l'esperimento ($t = 0$), l'altezza dell'albero era di* 1.00 m. *Dopo una settimana ($t = 1$) l'altezza dell'albero era di* 1.04 m. *Dopo due settimana ($t = 2$), di* 1.10 m. *Supponendo che l'altezza dipenda in modo quadratico dal tempo, trova la funzione che esprime la crescita dell'albero. La funzione che hai trovato può rappresentare la crescita dell'albero anche per tempi precedenti all'inizio della tua misurazione? A partire da quando? Perché?*

La generica funzione quadratica è $h(t) = at^2 + bt + c$. Troviamo a, b, c imponendo il passaggio per i punti dati; si ottiene

$$\begin{cases} 1.00 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \\ 1.04 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \\ 1.10 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0.01 \\ b = 0.03 \\ c = 1 \end{cases}$$

Pertanto $h(t) = 0.01t^2 + 0.03t + 1$.

Condizioni di sensatezza per la funzione trovata sono sicuramente che l'altezza dell'albero sia sempre positiva ($h \geq 0$) e che l'altezza dell'albero non decresca nel tempo. Il vertice della parabola è in $(-1.5, 0.9925)$; pertanto la prima condizione è sempre verificata e la seconda è verificata per $t \geq -1.5$. Bisogna pertanto richiedere che $t \geq -1.5$.

Esercizio 2.5. *Scrivi l'espressione esplicita di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica, continua e con un massimo nel punto $(1, 1)$ e un minimo nel punto $(3, -5)$.*

Proviamo con una funzione periodica del tipo

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}x + \phi\right) + M,$$

dove A è l'ampiezza della funzione (la semidifferenza tra il valore massimo e il valore minimo); T è il periodo della funzione, ovvero il tempo dopo cui la funzione si ripete uguale; M è la media tra il valore massimo e il valore minimo; e ϕ è la fase.

Nel nostro caso abbiamo $A = \frac{1+5}{2} = 3$ e $M = \frac{1-5}{2} = -2$. Inoltre, nel caso della funzione f un massimo e il minimo seguente distano un quarto del periodo, per cui $T = 4(3 - 1) = 8$.

Riassumendo quanto già trovato, ci siamo ricondotti a una funzione della forma

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \phi\right) - 2;$$

dobbiamo determinare la fase ϕ. Sapendo che un massimo si ottiene quando l'argomento del seno è $\frac{\pi}{2}$, imponendo che f abbia un massimo in 1 troviamo $\frac{\pi}{4} \cdot 1 + \phi = \frac{\pi}{2}$, ovvero $\phi = \frac{\pi}{4}$. Pertanto una funzione con le proprietà richieste è

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right) - 2.$$

Esercizio 2.6. *Un corpo caldo viene raffreddato a contatto con l'aria. I dati della temperatura (T) nel tempo (t), oltre ad alcuni altri dati ricavati da questi, sono riportati nella Tabella 1.*

(1) *Trova la migliore interpolazione lineare ($T = mt + d$) alla dipendenza fra la temperatura e il tempo. È una buona interpolazione?*
(2) *Trova la migliore interpolazione esponenziale ($T = ce^{kx}$) alla dipendenza fra la temperatura e il tempo. È una buona interpolazione?*
(3) *Quale fra queste due interpolazioni è la migliore?*

t	T	Tt	t^2	T^2	$\ln T$	$\ln T \ln t$	$\ln t$	$(\ln T)^2$	e^t	$T \ln t$	$t \ln T$
0.5	*80*	*40*	*0.25*	*6400*	*4.38*	*−3.02*	*−0.69*	*19.20*	*1.65*	*−55.45*	*2.19*
1	*60*	*60*	*1*	*3600*	*4.09*	*0*	*0*	*16.76*	*2.72*	*0*	*4.09*
2	*35*	*70*	*4*	*1225*	*3.56*	*2.46*	*0.69*	*12.64*	*7.39*	*24.26*	*7.11*
3	*20*	*60*	*9*	*400*	*3.00*	*3.30*	*1.10*	*8.97*	*20.09*	*21.97*	*8.99*
4	*15*	*60*	*16*	*225*	*2.71*	*3.77*	*1.39*	*7.33*	*54.60*	*20.79*	*10.83*
5	*10*	*50*	*25*	*100*	*2.30*	*3.70*	*1.61*	*5.30*	*148.41*	*16.09*	*11.51*
6	*5*	*30*	*36*	*25*	*1.61*	*2.88*	*1.79*	*2.59*	*403.43*	*8.96*	*9.66*
8	*2*	*16*	*64*	*4*	*0.69*	*1.44*	*2.08*	*0.48*	*2980.96*	*4.16*	*5.55*
9	*1*	*9*	*81*	*1*	*0*	*0*	*2.20*	*0*	*8103.08*	*2.20*	*0*
4.55	***23.10***	***41.60***	***28.53***	***1198.90***	***2.23***	***1.45***	***1.02***	***7.33***	***1281.90***	***4.88***	***6.76***

Tabella 1. Temperatura (T), tempo (t) misurati e alcune grandezze derivate. **Nell'ultima riga, in grassetto, sono indicate le medie**

(1) Per la migliore approssimazione $T = \overline{m}t + \overline{d}$, dal metodo dei minimi quadrati sappiamo che

$$\overline{m} = \frac{\overline{tT} - \overline{t} \cdot \overline{T}}{\overline{t^2} - \overline{t}^2} \approx \frac{41.60 - 4.55 \cdot 23.10}{28.53 - (4.55)^2} \approx -8.11 \ ,$$

$$\overline{d} = \overline{T} - \overline{m} \cdot \overline{t} \approx 23.10 + 8.11 \cdot 4.55 \approx 60.00 \ ,$$

Il coefficiente di Pearson (che da la bontà dell'approssimazione) è

$$CP = \frac{\overline{tT} - \overline{t} \cdot \overline{T}}{\sqrt{(\overline{t^2} - \overline{t}^2)(\overline{T^2} - \overline{T}^2)}} \approx \frac{41.60 - 4.55 \cdot 23.10}{\sqrt{(28.53 - (4.55)^2)(1198.90 - (23.10)^2)}} \approx -0.88 \ .$$

La migliore approssimazione dei dati è pertanto $T = -8.11t + 60$, che tuttavia non è buonissima.

(2) Per la migliore approssimazione esponenziale $T = ce^{kt}$, passando ai logaritmi si ottiene $\ln T = kt + \ln c$. Possiamo ora applicare il metodo dei minimi quadrati, ricavando

$$\overline{k} = \frac{\overline{t \ln T} - \overline{t} \cdot \overline{\ln T}}{\overline{t^2} - \overline{t}^2} \approx \frac{6.76 - 4.55 \cdot 2.23}{28.53 - (4.55)^2} \approx -0.43 \ ,$$

$$\overline{\ln c} = \overline{\ln T} - \overline{k} \cdot \overline{t} \approx 2.23 + 0.43 \cdot 4.55 \approx 1.52, \qquad e^{\overline{\ln c}} \approx e^{1.52} \approx 4.59 \ .$$

Pertanto la migliore approssimazione esponenziale è data da $T = 4.59e^{-0.43}$. Calcoliamo il coefficiente di Pearson

$$CP = \frac{\overline{t \ln T} - \overline{t} \cdot \overline{\ln T}}{\sqrt{(\overline{t^2} - \overline{t}^2)(\overline{(\ln T)^2} - \overline{\ln T}^2)}} \approx \frac{6.76 - 4.55 \cdot 2.23}{\sqrt{(28.53 - (4.55)^2)(7.33 - (2.23)^2)}} \approx -0.79 \ .$$

Anche questa approssimazione non è buona.

(3) Tra le due, l'approssimazione migliore dei dati è quella lineare (anche se nessuna delle due è soddisfacente). Con questi dati dovresti concludere che probabilmente nessuna delle due ipotesi è corretta (oppure che hai effettuato male le misure, se supponi che una delle due ipotesi a priori debba essere corretta).

3. Recupero Terzo Compitino

3.1. Terzo Compitino, Prima Parte.

Esercizio 3.1. *La funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 10x^5 - x$ è crescente? Perché?*

La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile ovunque, pertanto è crescente quando la sua derivata è positiva, ed è decrescente quando la sua derivata è negativa. Ora, $f'(x) = 50x^4 - 1$; quindi

$$50x^4 - 1 \geq 0 \iff x^4 \geq \frac{1}{50} \iff |x| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{50}} .$$

Dunque la funzione data non è (sempre) crescente.

Esercizio 3.2. *Calcola il seguente integrale*

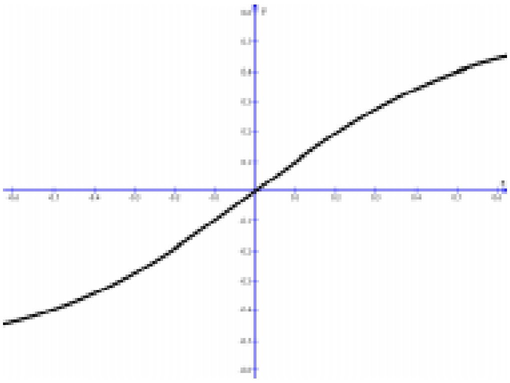
$$\int_{-1}^{0} (3x^2 + 2x + 1)\, dx .$$

Usando la linearità degli integrali, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (3x^2 + 2x + 1) dx &= \int_{-1}^{0} 3x^2 dx + \int_{-1}^{0} 2x dx + \int_{-1}^{0} 1\, dx \\ &= x^3\big|_{-1}^{0} + x^2\big|_{-1}^{0} + x\big|_{-1}^{0} = -1 + 1 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Esercizio 3.3. *Quale tra le seguenti può essere l'espressione analitica della funzione rappresentata nel grafico?*

(1) $f_1(x) = \frac{x}{x^2+1}$; 2. $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
3. $f_3(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; 4. $f_4(x) = x(x^2 - 1)$.



Innanzitutto notiamo che $f(0) = 0$ e, in un intorno di zero, $f(x)$ ha lo stesso segno di x. Ora, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = -1$, $f_3(0) = -1$, $f_4(0) = 0$; quindi possiamo escludere f_2 e f_3. Poi, $f_1(x)$ ha lo stesso segno di x (il denominatore è sempre positivo); invece $f_4(x)$ ha lo stesso segno di x dove $x^2 - 1$ è positivo, ovvero quando $|x| > 1$, non in un intorno di 0. Pertanto la funzione il cui grafico è rappresentato in figura è $f_1(x)$.

Esercizio 3.4. *Studiando la crescita della popolazione di rane in uno stagno, giungi alla conclusione che il numero N di individui varia nel tempo secondo la funzione*

$$N(t) = 100 + 50\frac{e^t - 1}{e^t + 1} .$$

Studia la funzione N (anche per tempi negativi).

Dominio. L'unica cosa da verificare è che il denominatore non si annulli. Ora, $e^t + 1 > 0$ per ogni t, dato che entrambi gli addendi sono positivi. Quindi $D = \mathbb{R}$.

Simmetrie. Vediamo se $N(t)$ è pari o dispari:

$$N(-t) = 100 + 50\frac{e^{-t} - 1}{e^{-t} + 1} = 100 + 50\frac{1 - e^t}{1 + e^t} = 100 - 50\frac{e^t - 1}{e^t + 1},$$

ovvero $N(t)$ non è né pari né dispari. Da quanto scritto sopra si vede che la parte pari è 100 e la parte dispari è $50\frac{e^t-1}{e^t+1}$.

Segno. Per studiare il segno riscriviamo $N(t)$ come

$$N(t) = \frac{150e^t + 50}{e^t + 1} .$$

Numeratore e denominatore sono sempre positivi, quindi $N(t) > 0$ per ogni t.

Limiti. Dobbiamo studiare i limiti per t che tende a $\pm\infty$.

$$\lim_{t\to-\infty} N(t) = \left[\frac{150 \cdot 0 + 50}{0+1}\right] = \left[\frac{50}{1}\right] = 50,$$

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \left[\frac{150 \cdot \infty + 50}{\infty+1}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Quest'ultimo limite è in forma indeterminata "infinito-su-infinito". Pertanto possiamo applicare de l'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{150e^t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} 150 = 150.$$

Crescenza. Per studiare la crescenza, dobbiamo calcolare la derivata prima di $N(t)$ e studiarne il segno.

$$N'(t) = 0 + 50\frac{e^t(e^t+1) - (e^t-1)e^t}{(e^t+1)^2} = 100\frac{e^t}{(e^t+1)^2} .$$

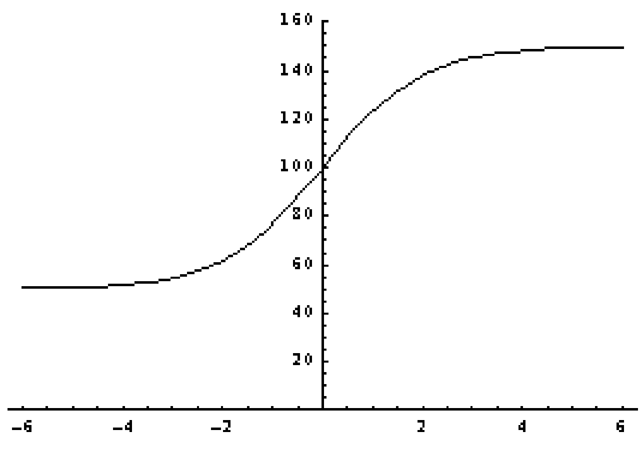
Sia il numeratore sia il denominatore sono sempre positivi, pertanto $N(t)$ è sempre crescente.

Concavità. Per studiare la concavità, dobbiamo calcolare la derivata seconda di $N(t)$ e studiarne il segno.

$$N''(t) = 100\frac{e^t(e^t+1)^2 - e^t 2(e^t+1)e^t}{(e^t+1)^4} = 100\frac{e^t(1-e^t)}{(e^t+1)^3} .$$

Il denominatore è sempre positivo, $100e^t$ pure, pertanto il segno è dato dal segno di $1 - e^t$. Ora, $1 - e^t > 0$ se e solo se $t < 0$. Pertanto per $t < 0$ $N(t)$ è convessa, per $t > 0$ è concava, e $t = 0$ è un punto di flesso.

Le informazioni raccolte sono riassunte nel grafico.



Esercizio 3.5. *Trova le migliori approssimazioni lineare e quadratica della funzione $f(x) = xe^x$ in $x_0 = 1$.*

Le migliori approssimazioni polinomiali di una funzione in un punto sono date dal polinomio di Tayor. Calcoliamo funzione, derivata prima e seconda di $f(x)$ in 1:

$$f(x) = xe^x, \quad f(1) = e,$$
$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x), \quad f'(1) = 2e,$$
$$f''(x) = e^x + e^x(1+x) = e^x(2+x), \quad f''(1) = 3e.$$

Pertanto i polinomi P_1 e P_2 (rispettivamente di primo e di secondo grado) che meglio approssimano $f(x)$ sono

$$P_1(x) = e + 2e(x-1) = 2ex - e,$$
$$P_2(x) = P_1(x) + 3e(x-1)^2 = P_1(x) + 3ex^2 - 6ex + 3e = 3ex^2 - 4ex + 2e.$$

Esercizio 3.6. *Sia X una variabile aleatoria con densità di probabilità data da*

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le -1 \\ \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{se } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{se } t \ge 1 \end{cases}$$

(1) *Qual è la funzione di distribuzione $F_X(t) = P\{X \le t\}$ di X?*
(2) *Qual è il valor medio $E(X)$ di X?*
(3) *Qual è la varianza $\mathrm{Var}(X)$ di X?*

(1) La funzione di distribuzione è data da

$$P\{X \le t\} = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$$

Dato che se $t \le -1$ l'integrale è 0, se $t \ge 1$ l'integrale è 1, e se $-1 \le t \le 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx &= \int_{-1}^{t} \frac{3}{4}(-x^2+1)dx \\ &= \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x\right)\Big|_{-1}^{t} = \frac{1}{4}(-t^3+3t) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

si ha

$$P\{X \le t\} = \begin{cases} 0 & se\ t \le -1 \\ \frac{1}{4}(-t^3+3t) + \frac{1}{2} & se\ -1 \le t \le 1 \\ 1 & se\ t \ge 1 \end{cases}$$

(2) Il valor medio è dato da

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(-t^3+t)dt \\ &= \left(-\frac{3}{16}t^4 + \frac{3}{8}t^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(-\frac{3}{16} + \frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{3}{16} + \frac{3}{8}\right) = 0. \end{aligned}$$

Infatti la funzione di distribuzione era pari... Pertanto il valor medio doveva necessariamente essere 0.

(3) La varianza è data da

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E[X])^2 f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(-t^4+t^2)\,dt \\ &= \left(-\frac{3}{20}t^5 + \frac{1}{4}t^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(-\frac{3}{20} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$