Correzione primo compitino, testo A

31 gennaio 2011

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Facciamo riferimento alle pagine 22 e 23 del libro di testo. Quando si ha a che fare con la moltiplicazione o la divisione di misure bisogna fare attenzione, poiché gli errori potrebbero influire sul risultato. Se l'errore relativo è piccolo (di solito dell'ordine di 10^{-1}) allora il valore stimato del prodotto (o del quoziente) è approssimativamente uguale al prodotto (o al quoziente) dei valori stimati, mentre l'errore relativo del prodotto (o del quoziente) è la somma degli errori relativi. La prima cosa da controllare, quindi, è che l'errore relativo sia piccolo. Indicheremo con $e_{r,D}$ l'errore relativo della misura del peso specifico del mercurio, e con $e_{r,P}$ l'errore relativo della misura del peso. Ora, per calcolare l'errore relativo $e_{r,D}$ abbiamo bisogno di conoscere il valore stimato e l'errore assoluto della misura del peso specifico del mercurio. Il valore stimato della misura è

$$\frac{13+14}{2}\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 13.5\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

e l'errore assoluto è quindi di $0.5\text{kg}/\text{dm}^3$. La misura del peso specifico del mercurio è quindi $13.5 \pm 0.5\text{kg}/\text{dm}^3$. Calcoliamo ora gli errori relativi:

$$e_{r,D} = \frac{0.5}{13.5} = \frac{1}{27} \quad e_{r,P} = \frac{2}{27}.$$

Vale quindi il discorso fatto sopra sul calcolo dell'errore assoluto di un prodotto. Per trovare il volume occupato V, si divide la massa per il peso specifico. Il volume stimato è quindi:

$$V \simeq 27\,\text{kg}\frac{1}{13.5}\frac{\text{dm}^3}{\text{kg}} = 2\text{dm}^3.$$

Dobbiamo ora calcolare l'errore assoluto. Nel caso di errori relativi piccoli, sappiamo che l'errore relativo del prodotto (o del quoziente) è circa uguale alla somma degli errori relativi dei fattori, ed è quindi $3/27 = 1/9$. L'errore assoluto sulla stima del volume sarà quindi:

$$e_{\text{ass}} \simeq 2\ \text{dm}^3\frac{1}{9} \simeq 0.22.$$

Quindi la misura del volume è:

$$2 \pm 0.22\,\text{dm}^3.$$

Esercizio 1.2. Per risolvere questo esercizio bisogna ricordarsi che due eventi A e B si dicono indipendenti (pag. 67 del vostro libro) se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ma

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{56} \neq \frac{2}{56} = P(A \cap B).$$

Quindi non possono esistere due eventi A e B indipendenti che corrispondono ai dati del problema.

Esercizio 1.3. La funzione $f(x) = 3x^2 - 2$ è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, avente vertice nel punto $(0, -2)$. Questa funzione quadratica da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ non è iniettiva, infatti

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 = 3 - 2 = 1 = f(1),$$

e quindi non è invertibile.

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per la parte teorica relativa alle percentuali rimandiamo alla sezione sulle percentuali del vostro libro di testo, da pag. 26.

In tutto l'esercizio useremo la seguente notazione: N_{anno} indica il numero di individui totali della popolazione per l'anno indicato, $N_{m,\text{anno}}$ indica il numero di individui maschi e $N_{f,\text{anno}}$ indica il numero di individui femmine. Inoltre indicheremo con $P_{f,\text{anno}}$ la percentuale di individui femmine per l'anno indicato e con $P_{m,\text{anno}}$ la percentuale di individui maschi.

1. Per calcolare la percentuale di femmine della popolazione nel 2008 usiamo la formula
$$P_{f,2008} = \frac{N_{f,2008}}{N_{2008}} \cdot 100. \tag{1}$$
Il numero di individui della popolazione è la somma degli individui maschi e di quelli femmine, cioè $96 + 304 = 400$ individui. Otteniamo quindi che la percentuale di femmine è $96/400 \cdot 100 = 24\%$. La percentuale di maschi nel 2008 è quindi:
$$\begin{aligned} P_{m,2008} &= \frac{N_{m,2008}}{N_{2008}} \cdot 100 \\ &= \frac{N_{2008} - N_{f,2008}}{N_{2008}} \cdot 100 \\ &= 100 - P_{f,2008}. \end{aligned}$$
La percentuale di maschi è quindi del 76%.

2. Questo punto è il problema inverso rispetto al punto precedente. Invertiamo la formula (1) ottenendo:
$$N_{f,2009} = \frac{P_{f,2009} \cdot N_{2009}}{100}.$$
Quindi, il numero di tigri femmine nel 2009 è di $0.3 \cdot 360 = 108$ e quindi il numero di maschi è $360 - 108 = 252$

3. Lo percentuale di femmine è calcolata con un errore assoluto del 5%. Questo significa che la misura della percentuale è 30±5%. Quindi il numero di tigri femmine varia fra:

$$\frac{25}{100} \cdot 360 = 90 \quad \text{e} \quad \frac{35}{100} \cdot 360 = 126.$$

4. Il punto importante, qui, è leggere bene il testo. Il testo ci dice che la percentuale di tigri maschi è diminuita del 10%; questo significa che

$$P_{m,2010} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) P_{m,2009} = 0.9 \cdot P_{m,2009},$$

cioè che $P_{m,2010} = 0.9 \cdot 70\% = 63\%$. Come già fatto nel punto 2, dato la percentuale di maschi ed il numero totale di individui possiamo calcolare il numero di maschi con la seguente formula:

$$N_{m,2010} = \frac{P_{m,2010} \cdot N_{2010}}{100}.$$

Il numero di maschi sarà quindi $0.63 \cdot 200 = 126$ e quello delle femmine di conseguenza sarà $200 - 126 = 64$.

5. La media del numero di tigri femmine viene calcolata utilizzando la seguente formula:

$$\text{Media} = \frac{N_{f,2008} + N_{f,2009} + N_{f,2010}}{3}.$$

Le definizioni di media e di varianza sono a pag. 135 e 139 del vostro libro. Possiamo ora calcolare la media:

$$\frac{96 + 108 + 64}{3} \simeq 89.3.$$

Per calcolare la varianza dobbiamo utilizzare la formula:

$$\frac{(N_{f,2008} - \text{Media})^2 + (N_{f,2009} - \text{Media})^2 + (N_{f,2010} - \text{Media})^2}{3}.$$

La varianza è quindi pari a circa 344.89.

6. I dati necessari sono tutti disponibili. Sappiamo infatti che $N_{2011} = (1 + \frac{10}{100})N_{2010} = 1.1 \cdot N_{2010}$, mentre $P_{f,2011} = (1 - \frac{8}{100})P_{f,2011} = 0.92 \cdot P_{f,2010}$. Ora, come in 2, abbiamo che

$$\begin{aligned} N_{f,2011} &= P_{f,2011} \cdot N_{2011} = 0.92 \cdot P_{f,2010} \cdot 1.1 \cdot N_{2010} \\ &= 0.92 \cdot 1.1 \cdot P_{f,2010} \cdot N_{2010} = 0.92 \cdot 1.1 \cdot N_{f,2010}. \end{aligned}$$

Ora, abbiamo che $0.92 \cdot 1.1 = 1.012$ e quindi il numero di tigri femmine è aumentato.

Esercizio 2.2. 1. La cosa da notare è che il fatto di poter scegliere sia tra le 26 lettere, sia tra le cifre da 0 a 9 significa che per ogni simbolo abbiamo, in generale, 36 possibili simboli tra cui scegliere. Quindi, per il principio base del calcolo combinatorio (pag. 81 del vostro libro) i possibili codici sono 36^4.

2. Per risolvere questo punto usiamo il fatto che in questa situazione la probabilità è di un evento è data da:
$$\frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}}.$$
Possiamo contare il numero di codici che contengono solo lettere: per il principio base del calcolo combinatorio sono 26^4. Quindi la probabilità che tutti i simboli di un codice preso a caso siano lettere è
$$\frac{\text{Codici composti solo da lettere}}{\text{Codici possibili}} = \frac{26^4}{36^4} = \left(\frac{26}{36}\right)^4.$$
Analogamente, poiché il numero di codici composti da sole cifre è 10^4, la probabilità che tutti i simboli siano cifre è
$$\frac{\text{Codici composti solo da cifre}}{\text{Codici possibili}} = \frac{10^4}{36^4} = \left(\frac{10}{36}\right)^4.$$

3. Di nuovo, ricordando che la probabilità di un evento è il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili, dobbiamo contare i codici in cui $1A$ appare nelle prime due posizioni. Ora, questo significa contare tutti i codici del tipo $1AXX$ dove X è un simbolo qualsiasi dei 36 a nostra disposizione. Quindi i casi favorevoli sono 36^2 e la probabilità è quindi
$$\frac{\text{Codici con } 1A \text{ nelle prime due posizioni}}{\text{Codici possibili}} = \frac{36^2}{36^4} = \frac{1}{36^2}.$$
Ora, il problema di contare i codici in cui 11 appare nelle prime due posizioni è assolutamente analogo. Come prima, stiamo contando tutti i codici del tipo $11XX$ dove X è un simbolo qualsiasi dei 36 a nostra disposizione. Quindi i casi favorevoli sono 36^2 e la probabilità è quindi
$$\frac{\text{Codici con 11 nelle prime due posizioni}}{\text{Codici possibili}} = \frac{36^2}{36^4} = \frac{1}{36^2}.$$
Con un ragionamento analogo si vede che fissate le prime due posizioni di un codice, la probabilità che un codice preso a caso sia di quella forma è $1/36^2$.

4. Dobbiamo contare i codici con 2 cifre e 2 lettere. Per fare questo, dobbiamo prima di tutto contare in quanti modi possiamo scegliere due cifre e due lettere; per il principio base del calcolo combinatorio, i modi sono $10^2 \cdot 36^2 = (36 \cdot 10)^2$. Poi, dobbiamo contare in quanti modi possiamo scegliere le due posizioni del codice in cui mettere nell'ordine le cifre scelte (e metteremo nell'ordine le lettere scelte nelle altre due posizioni). I modi di scegliere due posizioni fra quattro possibili è dato dal coefficiente binomiale
$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6\ .$$
Quindi in totale ci sono $6 \cdot (36 \cdot 10)^2$ codici composti da due cifre e due lettere, e la probabilità di scegliere a caso un codice con due cifre e due lettere è dunque:
$$\frac{6 \cdot (36 \cdot 10)^2}{36^4} = \frac{6 \cdot (10)^2}{36^2} = \frac{5^2}{6 \cdot 9} = \frac{25}{54}.$$

Un altro modo per rispondere a questa domanda era considerare il codice come una successione di quattro esperimenti, uno per ogni posizione. Ogni esperimento può dare due risultati possibili (lettera o numero), e gli esperimenti sono indipendenti fra loro. Si tratta quindi di un fenomeno di Bernoulli, e vogliamo calcolare la probabilità di esattamente 2 successi (2 lettere) su 4 esperimenti. La distribuzione binomiale ci dice che la risposta è

$$\binom{4}{2}\left(\frac{10}{36}\right)^2\left(\frac{26}{36}\right)^2 = \frac{25}{54}\,,$$

come ottenuto precedentemente.

Esercizio 2.3. 1. A pag. 71 del vostro libro potete trovare la legge di Hardy-Weinberg. Indicheremo con p_A la probabilità dell'allele A, con p_{AB} indicheremo la probabilità del **genotipo** AB, con F_T la probabilità del **fenotipo** "piega la lingua in tutte le direzioni" e così via. La legge di Hardy-Weinberg ci dice:

$$p_{AA} = p_A^2 \quad p_{BB} = p_B^2 \quad p_{NN} = p_N^2 \tag{2}$$

$$p_{AB} = 2p_Ap_B \quad p_{AN} = 2p_Ap_N \quad p_{BN} = 2p_Bp_N.$$

Dalle relazioni di dominanza tra gli alelli otteniamo:

$$F_A = p_{AA} + p_{AN}, \quad F_B = p_{BB} + p_{BN}, \quad F_T = p_{AB}, \quad F_N = p_{NN}.$$

Nel testo del problema ci vengono date le probabilità dei diversi fenotipi. Possiamo ora ricavare le probabilità dei singoli alleli; $F_N = p_N^2 = 0.25$ implica che $p_N = 0.5$. Ora, dal fatto che $F_A = p_A^2 + 2p_Ap_N = 0.3125$ e che $F_B = p_B^2 + 2p_Bp_N = 0.3125$ possiamo osservare che

$$\begin{aligned} 0 &= p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_N - 2p_Bp_N = (p_A - p_B)\cdot(p_A + p_B + 2p_N) \\ &= (p_A - p_B)(1 + p_N), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $p_A + p_B + p_N = 1$. Ora, poiché $p_N = 0.5$, risolvendo l'equazione otteniamo che $p_A = p_B$. Dunque $F_T = 2p_Ap_B = 2p_A^2 = 0.125 = 1/8$, perciò $p_B = p_A = \sqrt{1/16} = 1/4 = 0.25$. [Oppure, potevamo ricavare direttamente p_A risolvendo l'equazione $p_A^2 + 2p_Ap_N = 0.3125$ ricordando che $p_N = 0.5$, e poi recuperare p_B usando la formula $p_B = 1 - p_A - p_N$.] Usando le formule (2) ricaviamo

$$p_{AA} = 0.0625 \quad p_{NN} = 0.25 \quad p_{BB} = 0.0625$$

$$p_{AB} = 0.125 \quad p_{AN} = 0.25 \quad p_{BN} = 0.25.$$

2. Si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio piega la lingua solo verso l'alto" ed "il padre piega la lingua in tutte le direzioni e la madre solo verso il basso". Dobbiamo prima di tutto calcolare qual è la probabilità dell'intersezione. Siccome il padre piega la lingua in tutte le direzioni necessariamente il suo genotipo è AB, mentre il genotipo della madre può essere sia BB sia BN. Ora, per la legge di disgiunzione di Mendel abbiamo che nel caso la madre abbia genotipo BB, nessuno dei figli potrà piegare la lingua verso l'alto, in quanto i loro possibili genotipi

possono solo essere AB (tutte le direzioni) o BB (verso il basso). Quindi ai fini del calcolo della probabilità dell'intersezione, dobbiamo assumere che la madre abbia genotipo BN. Dunque, per la legge di disgiunzione di Mendel abbiamo che un quarto dei figli avrà genotipo AN. Siccome padre e madre hanno genotipi indipendenti, come pure è indipendente quale cromosoma passano ai figli, la probabilità dell'intersezione è:

$$\frac{1}{4} \cdot p_{BN} \cdot p_{AB}.$$

Ora, le probabilità che i genitori abbiano il fenotipo citato sono date da $F_T = p_{AB}$ e $F_B = p_{BB} + p_{BN}$ quindi la probabilità condizionata cercata è

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot p_{BN} \cdot p_{AB}}{p_{AB} \cdot (p_{BB} + p_{BN})} = \frac{p_N}{2(p_B + 2p_N)} = \frac{1}{5}.$$

3. Come sopra, si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio piega la lingua solo verso l'alto" e "la madre piega la lingua solo verso il basso". Calcoliamo la probabilità dell'intersezione dei due eventi. Perché una madre che piega la lingua solo verso il basso abbia un figlio che la piega verso l'alto la madre necessariamente deve avere genotipo BN; nel caso abbia genotipo BB nessun accoppiamento da luogo a figli con genotipo AA o AN. Nel caso la madre abbia genotipo BN, possiamo ottenere dei figli che abbiano genotipo AN attraverso l'accoppiamento con un padre avente genotipo AA, AN o AB. Nel caso il padre abbia genotipo AA, la metà dei figli avrà genotipo AN; nel caso di accoppiamento con un padre AN, un quarto dei figli avrà genotipo AN, mentre in caso di accoppiamento con un padre AB un quarto dei figli avrà genotipo AN. Quindi, la probabilità dell'intersezione è

$$\frac{1}{2}p_{BN}p_{AA} + \frac{1}{4}p_{BN}p_{AN} + \frac{1}{4}p_{BN}p_{AB}$$

Ora applichiamo la definizione della probabilità condizionata e dividiamo per la probabilità che la madre abbia fenotipo B. Dunque:

$$\frac{\frac{1}{2}p_{BN}p_{AA} + \frac{1}{4}p_{BN}p_{AN} + \frac{1}{4}p_{BN}p_{AB}}{p_{BB} + p_{BN}} = \frac{p_N p_A(p_A + p_N + p_B)}{p_B + 2p_N}$$

e ricordandoci che $p_A + p_B + p_N = 1$ otteniamo che

$$\frac{p_N p_A(p_A + p_N + p_B)}{p_B + 2p_N} = \frac{p_N p_A}{p_B + 2p_N} = \frac{1}{10}.$$

4. Se entrambi i genitori piegano la lingua solo verso il basso significa che entrambi hanno genotipo BN o BB. Quindi è impossibile che loro figlio abbia un genotipo contenente l'allele A. Dunque la probabilità è 0.