MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B

COMPITINO 2 FILA A — SOLUZIONI

PROF. MARCO ABATE

9 febbraio 2007

1. Parte I

Esercizio 1.1. *Perché non si può calcolare il logaritmo di un numero negativo?*

Sia $b < 0$. Calcolare $\log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, vuol dire trovare quel numero reale x tale che $a^x = b$ (il logaritmo è per definizione la funzione inversa dell'esponenziale). Ma un numero positivo (a) elevato ad un qualsiasi esponente (x) rimane positivo. Pertanto

$$0 \ < \ a^x \ = \ b \ < 0,$$

cioè $0 < 0$, assurdo. Pertanto non si può calcolare il logaritmo di un numero negativo.

Esercizio 1.2. *La media di tre numeri reali può essere maggiore del massimo dei tre numeri? Se sì fai un esempio, se no perché?*

Siano $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Sia $M = \max\{x_1, x_2, x_3\}$. Possiamo riscrivere i tre numeri come $M, M-a, M-b$, con $a, b \geq 0$, dato che M è il massimo dei tre numeri. Allora la media $\overline{x}$ dei tre numeri è:

$$\overline{x} \ = \ \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i \ = \ \frac{M + (M-a) + (M-b)}{3} \ = \ M - \frac{a+b}{3} \ \leq \ M,$$

ovvero la media di tre numeri reali è sempre minore o uguale al massimo dei tre numeri.

Esercizio 1.3. *Per i punti* $(0,0)$, $(1,2)$ *e* $(3,7)$ *passa una retta? Se sì, quale?*

Per due punti passa una e una sola retta. Trovata la retta che passa per $(0,0)$ e $(1,2)$ o questa passa anche per $(3,7)$ (e allora per i tre punti passa una retta) oppure no (e allora nessuna retta passa per tutti e tre i punti).

La retta che passa per $(0,0)$ e $(1,2)$ è la retta $y = mx + d$ che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + d \\ 2 = m \cdot 1 + d \end{cases}$$

ovvero la retta $y = 2x$. $y(3) = 6 \neq 7$, ovvero la retta non passa anche per $(3,7)$. Nessuna retta passa per tutti e tre i punti.

2. Parte II

Esercizio 2.1. *Effettui un esperimento in cui misuri l'altezza di un oggetto lanciato in aria in funzione del tempo e ottieni le seguenti coppie di dati* $(10,10)$, $(15,20)$, $(20,5)$ *(la coppia* $(15,20)$ *indica che dopo* 15 *secondi l'oggetto è ad altezza* 20 *metri). Dalle tue ipotesi sull'esperimento, supponi che la funzione che lega le due quantità sia quadratica.*

(1) *Dai l'espressione esplicita della funzione quadratica che passa per i dati.*
(2) *Per che intervallo di valori tale funzione può effettivamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?*

(1) Abbiamo supposto che la funzione che lega tempo (t) e altezza (h) sia quadratica, ovvero della forma $h = at^2+bt+c$. Imponiamo le condizioni di passaggio per i tre dati e applichiamo il metodo delle differenze:

$$\begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 20 = 225a + 15b + c \\ 5 = 400a + 20b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 10 = 125a + 5b \\ -15 = 175a + 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 10 = 125a + 5b \\ -25 = 50a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ 10 = 125a + 5b \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 100a + 10b + c \\ b = \frac{29}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -85 \\ b = \frac{29}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la funzione cercata è

$$h = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{29}{2}t - 85.$$

(2) Non abbiamo molti dati sull'esperimento[1]. Quello che è sicuro è che l'oggetto lanciato in aria non potrà diminuire arbitrariamente la sua altezza, in quanto limitato (dal pavimento). Supponendo che il pavimento sia ad altezza $h_0 = 0$, allora la funzione trovata ha senso quando è positiva:

$$h = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{29}{2}t - 85 \geq 0.$$

Ovvero l'intervallo in cui essa descrive l'esperimento è (t approssimato al centesimo di secondo) $t \in [8.16; 20.84]$.

Esercizio 2.2. *Scrivi l'espressione esplicita di una funzione $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, continua e monotona crescente, tale che $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$.*

Ovviamente funzioni con questo comportamento ce ne sono tante. Ci limitiamo a costruirne una[2]. Come prima cosa cerchiamo una funzione che abbia un limite finito a $+\infty$. La funzione

$$f_0(x) = a^x, \quad 0 < a < 1,$$

fa al caso nostro. Questa funzione è monotona decrescente. Per renderla crescente, la moltiplichiamo per -1:

$$f_1(x) = -a^x, \quad 0 < a < 1.$$

Curiamoci ora dell'*ampiezza* della funzione, ovvero di quanto aumenta quando x va da 0 all'infinito. $f_1(x)$ passa da un valore -1 a 0 (ovvero ha ampiezza 1), la funzione cercata ha ampiezza 4. Moltiplichiamo pertanto f_1 per 4:

$$f_2(x) = -4a^x, \quad 0 < a < 1.$$

Ora interessiamoci al fatto che passi per il punto $(0, 1)$. $f_2(0) = -4$, pertanto dobbiamo aggiungere 5:

$$f_3(x) = 5 - 4a^x, \quad 0 < a < 1.$$

---

[1] Pertanto quella che segue non è *la soluzione* dell'esercizio, ma una possibile soluzione

[2] Curiosità: l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, continua e monotona crescente, tale che $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ non si può esprimere meglio di quanto non sia già espresso da questo testo... Non si può certamente pretendere di elencare in qualche modo tutte le funzioni che vi appartengono...

f_3 è continua, monotona crescente, $f_3(0) = 1$ e $\lim_{x\to\infty} f_3(x) = 5$. Resta soltanto da restringere f_3 al dominio richiesto, ovvero $x \geq 0$:

$$f(x) = f_3|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x).$$

Esercizio 2.3. *Fai alcuni esperimenti, calcolando due quantità (x e y). I risultati delle misurazioni, ed altri ottenuti da questi tramite semplici operazioni da questi, sono dati.*

(1) *Supponi che y dipenda linearmente da x. Qual è la retta di regressione? L'approssimazione è buona?*
(2) *Se invece supponi che y abbia un comportamento esponenziale in x (cioè si comporti come e^x), qual è la migliore approssimazione che puoi dare? L'approssimazione è buona?*

(1) Gli unici dati necessari sono i seguenti valori medi: $\overline{x} = 5.2$, $\overline{y} = 10.6$, $\overline{x^2} = 35.8$, $\overline{y^2} = 151.4$ e $\overline{xy} = 73.5$. La retta di regressione $y = \overline{m}x + \overline{d}$ è data da

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{73.5 - 5.2 \cdot 10.6}{35.8 - (5.2)^2} = 2.1 \\ \overline{d} &= \overline{y} - \overline{m} \cdot \overline{x} = 10.6 - 2.1 \cdot 5.2 = -0.32. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di regressione è $y = 2.1x - 0.32$. La bontà dell'approssimazione è data dal coefficiente di Paerson:

$$CP = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{y^2} - \overline{y}^2)}} = \frac{73.5 - 5.2 \cdot 10.6}{\sqrt{(35.8 - (5.2)^2)(151.4 - (10.6)^2)}} \approx 0.985,$$

quindi l'approssimazione è buona (il coefficiente di Paerson è vicino a 1).

(2) Vogliamo trovare una relazione del tipo $y = Ae^{cx}$. Prendendo il logaritmo di tale relazione, otteniamo

$$\log y = \log A + cx,$$

ovvero una dipendenza lineare fra x e $\log y$. Pertanto sono necessari i seguenti valori medi: $\overline{x} = 5.2$, $\overline{\log y} = 2.14$, $\overline{x^2} = 35.8$, $\overline{(\log y)^2} = 5.09$ e $\overline{x \log y} = 13.15$. La retta di regressione è data da:

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \frac{\overline{x \log y} - \overline{x} \cdot \overline{\log y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{13.15 - 5.2 \cdot 2.14}{35.8 - (5.2)^2} \approx 0.23 \\ \overline{\log A} &= \overline{\log y} - \overline{c} \cdot \overline{x} \approx 2.14 - 0.23 \cdot 5.2 \approx 0.94. \end{aligned}$$

Pertanto la funzione esponenziale ottimale è

$$y \approx e^{0.23x + 0.94} \approx 2.56 \cdot e^{0.23x} \approx 2.56 \cdot (1.26)^x.$$

La bontà dell'approssimazione è data dal coefficiente di Paerson:

$$CP = \frac{\overline{x \log y} - \overline{x} \cdot \overline{\log y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{\log y^2} - \overline{\log y}^2)}} \approx \frac{13.15 - 5.2 \cdot 2.14}{\sqrt{(35.8 - (5.2)^2)(5.09 - (2.14)^2)}} \approx 0.956,$$

che è una buona approssimazione (il coefficiente è vicino a uno), ma peggiore dell'approssimazione lineare.