MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B

COMPITINO DI PROVA — SOLUZIONI

PROF. MARCO ABATE

14 novembre 2006

1. Parte I

Esercizio 1.1 (3 punti)**.** *Se $9.8 < x < 10.2$ e $9.8 < y < 10.2$, quali sono il valore medio e l'errore del prodotto $x \cdot y$?*

Per calcolare valore medio (o stimato) ed errore del prodotto, bisogna prima calcolare valore medio ed errore di x e y.

Valore medio:

$$VM_x = VM_y = \frac{9.8 + 10.2}{2} = 10,$$

errore assoluto:

$$EA_x = EA_y = \frac{10.2 - 9.8}{2} = 0.2,$$

errore relativo:

$$ER_x = ER_y = \frac{EA_x}{VM_x} = 0.02 = 2\%.$$

Siccome gli errori relativi sono piccoli, possiamo usare la formula approssimata per il prodotto. Pertanto:

$$VM_{xy} = VM_x VM_y = 100,$$
$$ER_{xy} = ER_x + ER_y = 4\%,$$
$$EA_{xy} = ER_{xy} \cdot VM_{xy} = 4.$$

Esercizio 1.2 (3 punti)**.** *Siano A e B due insiemi finiti con rispettivamente m e n elementi ($m > n$).*

(a) *Esistono funzioni surgettive da A a B? Perché?*
(b) *Esistono funzioni iniettive da A a B? Perché?*

(a) Sì. Ad esempio, numerando gli elementi di A: $a_1, \dots, a_m$, e di B: $b_1, \dots, b_n$, $f : A \to B$ data da

$$f(a_j) = \begin{cases} b_j & \textit{if } j \le n \\ b_1 & \textit{if } j > n \end{cases}$$

è surgettiva (ogni elemento di B è immagine di (almeno) un elemento di A.

(b) No. Supponiamo per assurdo che una $f : A \to B$ iniettiva esista. Numeriamo gli elementi di A: $a_1, \dots, a_m$. Chiamiamo b_1 l'immagine di a_1 tramite f. Siccome f è iniettiva, $f(a_2) \neq f(a_1) = b_1$. Pertanto possiamo chiamare b_2 l'immagine di a_2 tramite f. Continuando così, dopo aver chiamato $b_1, \dots, b_m$ le immagini distinte di $a_1, \dots, a_m$ tramite f, non restano altri elementi di B. Pertanto $f(b_{m+1})$ non può essere distinta da $b_1, \dots, b_m$. f non è iniettiva!

Esercizio 1.3 (3 punti)**.** *Siano A e B due sottoinsiemi diversi di un certo spazio degli eventi Ω: possiamo affermare che la probabilitá che accada A è diversa dalla probabilità che accada accada B? Perchè?*

No. Ad esempio nel lancio di una moneta non truccata l'evento T (esce testa) e C (esce croce) sono eventi diversi, entrambi con probabilità $1/2$.

2. Parte II

Esercizio 2.1 (14 punti)**.** *Considera una colonia con* 10 *api operaie e un'ape regina. In quanti modi diversi posso scegliere un gruppo di* 4 *api in modo che*

(a) *(3 punti) siano tutte operaie?*
(b) *(3 punti) nel gruppo ci sia la regina?*

Più in generale, in una colonia con n api operaie e un'ape regina in quanti modi diversi posso scegliere un gruppo di k api in modo che

(c) *(4 punti) siano tutte operaie?*
(d) *(4 punti) nel gruppo ci sia la regina?*

(a) Affinché siano tutte operaie, dobbiamo scegliere 4 api distinte in un gruppo di 10. Pertanto possiamo scegliere il gruppo in

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$$

modi.

(b) Affinché nel gruppo ci sia la regina, dobbiamo scegliere la regina (un'unica possibilità di scelta) e poi 3 api distinte in un gruppo di 10. Pertanto possiamo scegliere il gruppo in

$$1 \cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$$

modi.

(c) Generalizzazione del ragionamento di (a):

$$\binom{n}{k},$$

anche nel caso in cui k sia maggiore di n, dato che in questo caso, per convenzione il binomiale è zero.

(d) Generalizzazione del ragionamento di (b):

$$\binom{n}{k-1},$$

anche nel caso in cui $k-1$ sia maggiore di n, dato che in questo caso, per convenzione il binomiale è zero.

Esercizio 2.2 (13 punti)**.** *In un parcheggio possono parcheggiare autobus e auto. Sono disponibili* 200 *piazzole di sosta. Un auto occupa una piazzola e paga* 2 *Euro all'ora di parcheggio. Un autobus occupa tre piazzole e paga* 5 *Euro all'ora di parcheggio. Sapendo che, per ragioni di sicurezza, nel parcheggio possono stare al più* 100 *mezzi parcheggiati, quanto può guadagnare al massimo il gestore del parcheggio ogni ora? Quante auto sono parcheggiate nella situazione di massimo guadagno?*

Traduciamo in formule i dati del problema. Indichiamo con x il numero di automobili parcheggiate, e con y il numero di autobus parcheggiati.

"Sono disponibili 200 piazzole di sosta $[\cdots]$ Un auto occupa una piazzola $[\cdots]$ Un autobus occupa tre piazzole" diventa

$$x + 3y \leq 200$$

(le piazzole occupate sono al massimo tante quante le piazzole disponibili) "nel parcheggio possono stare al più 100 mezzi parcheggiati" diventa

$$x + y \leq 100$$

Inoltre bisogna osservare che non si possono parcheggiare un numero negativo di automobili ($x \geq 0$) o di autobus ($y \geq 0$). Queste sono tutte le condizioni poste dal problema. Una volta rappresentate in figura, bisogna trovare il massimo guadagno

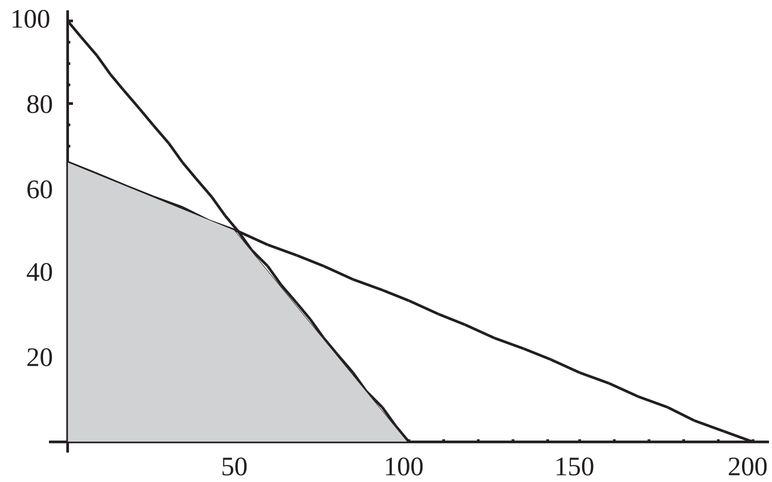

Figura 1. Rappresentazione grafica delle condizioni. La variabile x rappresenta il numero di automobili parcheggiate, la variabile y il numero di autobus parcheggiati

possibile sul quadrilatero delle possibilità concesse (la zona grigia in figura).

Il guadagno è dato dalla seguente funzione:

$$G(x, y) = 2x + 5y$$

(2 Euro per ogni auto, 5 Euro per ogni autobus)

Il massimo di questa funzione si ha necessariamente su uno dei vertici del quadrilatero. I vertici sono i punti $(0, 0)$ (intersezione di $x = 0$ e $y = 0$), $(100, 0)$ (intersezione di $x + y = 100$ e $y = 0$), $(50, 50)$ (intersezione di $x + y = 100$ e $x + 3y = 200$) e $(0, 66.\overline{6})$ (intersezione di $x = 0$ e $x + 3y = 200$).

$$G(0, 0) = 0, \quad G(100, 0) = 200$$

$$G(50, 50) = 350, \quad G(0, 66.\overline{6}) = 333.\overline{3}$$

Pertanto il massimo guadagno è di 350 Euro l'ora, e in questa situazione sono parcheggiate 50 auto.