6. Esercitazioni del 13 novembre 2006

Esercizio 6.1. *Una vasta area coltivabile di al più* 1000 *are (cioè* $10Km^2$*) viene coltivata a mais e patate. Per combattere contro gli insetti e le malattie delle piante, viene coltivata almeno il* 30% *a patate e almeno il* 30% *a mais. Ogni ara di terreno produce* $8.3t$ *di patate o* $7.7t$ *di mais. Ogni kilogrammo di patate contiene* $20g$ *di proteine e ogni kilogrammo di mais contiene* $32g$ *di proteine. Qual è il massimo quantitativo di proteine che il campo riesce a produrre?*

Dobbiamo innanzitutto decidere quali sono le variabili che intendiamo considerare. Le possibilità sono: le are coltivate a mais (x), le are coltivate a patate (y), e le are totali coltivate (z). Ovviamente si ha

$$x + y = z,$$

e quindi due qualsiasi variabili determinano la terza. Quali variabili scegliere è pura questione di gusti. Useremo x e y come variabili.

Prova a risolvere l'esercizio usando x e z (o y e z) come variabili.

Scriviamo in linguaggio matematico tutte le affermazioni contenute nel testo. "Una vasta area coltivabile di al più 1000 are" diventa

$$x + y \leq 1000 \tag{14}$$

"viene coltivata almeno il 30% a patate e almeno il 30% a mais" diventa

$$x \geq 30\%(x + y), \qquad y \geq 30\%(x + y),$$

ovvero

$$7x \geq 3y, \qquad 7y \geq 3x. \tag{15}$$

Inoltre è bene ricorarsi che x e y non possono essere negativi (non posso coltivare -5 are di terreno a patate), cioè

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0. \tag{16}$$

I vincoli sono questi. Risolvendo le equazioni associate alle disequazioni, si ottiene che la regione individuata dai vincoli è un triangolo di vertici $(0, 0)$, $(300, 700)$, $(700, 300)$ (le intersezioni delle prime tre condizioni a due a due).

Vogliamo massimizzare le proteine prodotte all'interno della regione consentita. Il massimo sarà su uno dei vertici del triangolo. Dobbiamo trovare esplicitamente la funzione che ci dà le proteine prodotte e quindi valutarla sui tre vertici del triangolo. Quindi consideriamo un'ara di patate. Questa produce $8.3t = 8300Kg$ di patate, e ogni kilogrammo di patate produce $20g = 0.02Kg$ di proteine. Pertanto x are di patate producono

$$(8300x)0.02 = 166x \tag{17}$$

kilogrammi di proteine. Un'ara di mais produce $7.7t = 7700Kg$ di mais, e ogni kilogrammo di mais produce $32g = 0.032Kg$ di proteine. Pertanto y are di mais producono

$$(7700y)0.032 = 246.4 \tag{18}$$

kilogrammi di proteine. Pertanto le proteine prodotte da un campo con x are coltivate a patate e y are coltivate a mais sono

$$P(x, y) = 166x + 246.4y \tag{19}$$

e quindi otteniamo

$$P(0, 0) = 0$$

(giustamente, se non coltivo niente, non raccolgo niente, nè patate, nè mais, nè proteine)

$$P(300, 700) = 222280$$

$$P(700, 300) = 190120,$$

e quindi il massimo si ottiene coltivando 700 are del campo a mais e 300 a patate.

Esercizio 6.2. *In un'urna ci sono* 6 *palline,* 2 *bianche e* 4 *rosse. Estraiamo, una per volta le palline, rimettendo nell'urna solo le palline bianche estratte. Facendo* 3 *estrazioni, qual è la probabilità:*

- *di estrarne* 3 *rosse?*
- *di estrarne* 3 *bianche?*
- *di estrarne* 2 *rosse e* 1 *bianca?*
- *di estrarne* 2 *bianche e* 1 *rossa?*

Ovviamente le probabilità delle estrazioni successive dipendono dal risultato delle estrazioni precedenti.

Per estrarre tre palline rosse, devo estrarre ad ogni estrazione una pallina rossa. Alla prima estrazione ho 4 palline rosse su 6 totali, alla seconda 3 palline rosse su 5 totali e alla terza 2 palline rosse su 4 totali. Pertanto

$$P(3R) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}.$$

Per estrarre tre palline bianche ad ogni estrazione devo estrarre una pallina bianca, e dato che in questo caso le estrazioni avvengono con rimbussolamento, la probabilità di ogni estrazione è sempre di 2 (casi favorevoli) su 6 (casi totali). Pertanto

$$P(3B) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Per estrarre due palline rosse e una bianca posso procedere il tre modi, a seconda di quando viene estratta la pallina bianca. Bianca, rossa, rossa ha probabilità

$$P(B, R, R) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{15}.$$

Rossa, bianca, rossa ha probabilità

$$P(R, B, R) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{25}.$$

Rossa, rossa, bianca ha probabilità

$$P(R, R, B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}.$$

Pertanto la probabilità di estrarre due palline rosse e una bianca è la somma di queste tre probabilità, ovvero

$$P(2R, 1B) = \frac{2}{15} + \frac{4}{25} + \frac{1}{5} = \frac{37}{75}.$$

Estrarre due palline bianche e una rossa è l'unica possibilità restante. Pertanto la probabilità di questo evento è

$$P(1R, 2B) = 1 - (P(3R) + P(3B) + P(2R, 1B)) = \frac{92}{675}.$$

7. Risultati (senza soluzioni complete) dei compiti a casa

7.1. **Percentuali. 2.1**. -0.3%

2.2. Circa -0.33%

2.4. Massimo pagamento: 25 Euro. Massimo pagamento di uno studente di "Matematica e Statistica per Biologi": 21 Euro.

2.5. Sono aumentati del 21%. Devono essere abbassati di circa il 17.4%.

7.2. **Probabilità I.** **2.6**.

$$P(fare\ 13) = \frac{1}{3^{13}}$$

$$P(fare\ 0) = \frac{2^{13}}{3^{13}}$$

2.8.

$$P(somma\ 8) = \frac{8}{90}$$

$$P(somma\ 12) = \frac{7}{90}$$

Lo spazio degli eventi è $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 18\}$. La somme più probabili sono 9 e 10.

2.9. Uguali probabilità.

$$P = \binom{5}{2}\frac{1}{2^5} = \frac{5}{16}$$

2.10.

$$P(1) = \frac{1}{6}, \quad P(6) = \frac{1}{6}, \quad P(7) = 0$$

2.11. (2.9) Due teste e tre croci è più probabile.

$$P(2C, 3T) = \binom{5}{2}\frac{2^2}{3^5} = \frac{40}{243} < \frac{80}{243} = \binom{5}{2}\frac{2^3}{3^5} = P(3C, 2T)$$

(2.10)

$$P(1) = \frac{1}{9}, \quad P(6) = \frac{2}{9}, \quad P(7) = 0$$

2.12.

$$P(poker\ d'assi) = \frac{48}{\binom{52}{5}}$$

2.13.

$$P(3M) = 0.512^3 \approx 13.4\%, \quad P(3F) = 0.488^3 \approx 11.6\%$$

$$P(2M, 1F) = 3 \cdot 0.512^2 \cdot 0.488 \approx 38.4\%, P(\geq 2M) \approx 51.8\%$$

2.14. Sapendo che il primo figlio è un maschio:

$$P(3M) = 0.512^2 \approx 26.2\%, \quad P(3F) = 0$$

$$P(2M, 1F) = 2 \cdot 0.512 \cdot 0.488 \approx 50.0\%, P(\geq 2M) \approx 76.2\%$$

Sapendo che il primo figlio è una femmina:

$$P(3M) = 0, \quad P(3F) = 0.488^2 \approx 23.8\%$$

$$P(2M, 1F) = 0.512^2 \approx 26.2\%, \quad P(\geq 2M) \approx 26.2\%$$

2.15.

$$P(9) = 0.95^3 \approx 85.7\%, \quad P(10) = 3 \cdot 0.95^2 \cdot 0.04 \approx 10.8\%$$

$$P(11) = 3 \cdot 0.95^2 \cdot 0.01 + 6 \cdot 0.95 \cdot 0.04 \cdot 0.01 \approx 2.9\%, \quad P(\geq 12) \approx 0.6\%$$

7.3. **Ordini di grandezza e calcolo approssimato.** Le risposte per il calcolo approssimato sono, forzatamente, approssimative...

4.1. Tra 47250 e 90000.

4.2. Circa 80.

4.3. Circa $1.3 \cdot 10^6$.

7.4. **Errori.** **4.4**. Parallelepipedo: $(1.60 \pm 0.29)10^{-20}m$, errore relativo 18%. Cilindro: $(1.26 \pm 0.23)10^{-20}m$, errore relativo 18%.

7.5. **Probabilità II.** **4.5**. $\{T, C\} \times \{T, C\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in entrambi i casi.
4.6. $P = \frac{1}{24}$.
4.7. $P = \frac{31}{192}$.
4.8. (4.5) stessa risposta.
(4.6) $P = \frac{1}{128}$.
(4.7) $P = \frac{187}{2048}$.
4.9. Fare 4.
4.10. 7, $P = \frac{1}{6}$. $n + 1$, $P = \frac{1}{n}$.
4.11. 2 e 12, $P = \frac{1}{36}$. 2 e $2n$, $P = \frac{1}{2n}$.
4.12. Di più: $\frac{1}{2}$. Di meno: $\frac{1}{3}$. Uguale: $\frac{1}{6}$.
4.13 No, a meno che (caso patologico) uno dei due sia di probabilità zero.

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, 7 — I-56126 Pisa, Italy
E-mail address: `a.saracco@sns.it`