Sistemi dinamici discreti olomorfi locali

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa
E-mail: abate@dm.unipi.it

Luglio 2006

0. Introduzione

Negli ultimi trent'anni la teoria dei sistemi dinamici, nelle sue mille sfaccettature, è diventata uno dei campi di punta della matematica contemporanea, con numerose applicazioni, matematiche e non. Uno dei motivi dell'interesse suscitato dai sistemi dinamici è che si tratta di un tipico campo di frontiera, in cui sono utilizzate tecniche prese a prestito (e spesso restituite migliorate) da tutta la matematica, dalla teoria dei numeri alla teoria della misura, dalla geometria differenziale alla geometria degli spazi di Banach, dalle equazioni differenziali ordinarie alle equazioni coomologiche, e così via. I problemi affrontati nella teoria dei sistemi dinamici sono spesso semplici da spiegare, e di interesse evidente; le soluzioni trovate sono spesso profonde e complesse, con enunciati eleganti e dimostrazioni lunghe decine e decine di pagine.

Una situazione ideale per lavorarci, molto meno per scrivere un articolo di rassegna. L'ottima "Introduzione alla teoria moderna dei sistemi dinamici" di Katok e Hasselblatt [HK] consta di più di 800 pagine — scritte con uno stile conciso e saltando diversi argomenti pure importanti... L'unica via possibile per rimanere all'interno di un numero ragionevole di pagine consiste nello scegliere un aspetto particolare dell'intera teoria e concentrarsi su quello, puntando sul fatto che il processo metonimico funzioni abbastanza da fornire una sia pur vaga idea dell'argomento nel suo complesso.

All'interno della teoria dei sistemi dinamici ci sono delle suddivisioni naturali, che suggeriscono possibili scelte di argomenti. La prima grossa dicotomia è *discreto/continuo.* Un sistema dinamico è (in parole molto povere) un sistema che varia nel tempo secondo una legge ben definita. Se permettiamo al sistema di evolvere solo in istanti temporali discreti, per cui la legge di evoluzione è rappresentata da una funzione iterata a intervalli regolari, si parla di *sistema dinamico discreto;* se invece il sistema si evolve in continuazione, per cui la legge di evoluzione è (usualmente) rappresentata da un'equazione differenziale ordinaria (da un campo vettoriale), si parla di *sistema dinamico continuo.*

La teoria dei sistemi dinamici, sia discreti sia continui, si occupa quindi di oggetti ben noti e studiati anche precedentemente; funzioni di varia regolarità in un caso, equazioni differenziali nell'altro. Quello che (come vedremo) contraddistingue i sistemi dinamici da altre teorie matematiche non sono gli oggetti di studio ma il *tipo di domande* che ci si pone. Non ci interessa sapere se un certo tipo di equazione differenziale ha o meno soluzione; ci interessa studiare l'evoluzione *qualitativa nel tempo* (il comportamento asintotico) delle soluzioni.

Vale la pena osservare fin da subito che la dicotomia discreto/continuo non è (come le altre dicotomie che incontreremo) rigida. Ci sono tecniche standard per associare un sistema dinamico discreto a uno continuo, e viceversa; e non è raro che i risultati ottenuti in un settore abbiano analogie/applicazioni/ispirazione nell'altro.

Un'altra dicotomia importante è quella *locale/globale.* Il comportamento dinamico più semplice possibile è quello in cui non si muove nulla: un punto fisso di una funzione nel caso discreto, uno zero di un campo vettoriale nel caso continuo. La dinamica locale si occupa di studiare cosa succede vicino a questi punti; la dinamica globale si occupa invece di studiare il comportamento asintotico su tutta la varietà in cui è definito il sistema dinamico. Di nuovo, è chiaro che lo studio locale influenza la dinamica globale; viceversa, a volte capita che per risolvere questioni locali sia necessario utilizzare tecniche di natura più globale.

Infine, un'ulteriore suddivisione naturale è causata dal grado di regolarità del sistema dinamico che si studia: di classe C^∞ o solo misurabile, olomorfo o analitico reale o solo continuo, e così via. Molto spesso, le domande nei vari casi sono le stesse; le risposte invece possono cambiare radicalmente.

In questo articolo cercherò di dare un'idea dello stato attuale della teoria dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali in una e più variabili complesse. Nata più o meno in contemporanea con la nascita dell'intera teoria dei sistemi dinamici (il primo risultato di una certa importanza, il teorema di Kœnigs, è del 1884, il famoso articolo seminale di Poincaré sulla dinamica del sistema dei tre corpi è del 1890), si è sviluppata parallelamente al resto della teoria dei sistemi dinamici olomorfi discreti. In particolare, i principali risultati in una variabile sono quelli ottenuti da Fatou e altri negli anni '20, e quelli ottenuti da Yoccoz e altri negli anni '80. La teoria in più variabili è invece nata essenzialmente negli anni '80 con i lavori di Écalle, ed è tutt'ora in pieno sviluppo.

La Sezione 1 di questo articolo descrive con precisione gli oggetti studiati dalla dinamica olomorfa locale discreta, e le domande che ci poniamo su di essi. Le Sezioni 2–4 sono dedicate alla teoria in una variabile; le Sezioni 5–7 alla teoria in più variabili complesse. Infine, l'articolo è concluso da una vasta bibliografia.

1. Le domande fondamentali

Sia M una varietà complessa, e $p \in M$. In questo articolo, un *sistema dinamico (discreto) olomorfo locale* in p è un'applicazione olomorfa $f\colon U \to M$ tale che $f(p) = p$, dove $U \subseteq M$ è un intorno aperto di p; supporremo sempre che f non sia l'identità di M. Indicheremo con $\mathrm{End}(M, p)$ l'insieme dei sistemi dinamici olomorfi discreti locali in p dentro M.

Osservazione 1.1: Siccome siamo principalmente interessati al comportamento di f vicino a p, sostituiremo spesso f con una sua restrizione a un opportuno intorno aperto di p. Si potrebbe formalizzare questa operazione usando germi di applicazioni e di insiemi in p, ma per i nostri scopi sarà sufficiente usare un approccio meno formale.

Osservazione 1.2: In questo articolo non parleremo mai di sistemi dinamici olomorfi continui (cioè di foliazioni olomorfe). Quindi d'ora in poi per noi ogni sistema dinamico sarà discreto.

Per parlare della dinamica di una $f \in \mathrm{End}(M, p)$ abbiamo bisogno delle iterate di f. Se f è definita nell'insieme U, l'iterata seconda $f^2 = f \circ f$ è allora definita solo in $U \cap f^{-1}(U)$, che è ancora un intorno aperto di p. In generale, l'iterata k-esima $f^k = f \circ f^{k-1}$ è definita in $U \cap f^{-1}(U) \cap \cdots \cap f^{-(k-1)}(U)$. È quindi naturale introdurre l'*insieme stabile* K_f di f con

$$K_f = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U) .$$

Chiaramente, $p \in K_f$, per cui l'insieme stabile non è mai vuoto (ma può succedere che $K_f = \{p\}$; vedremo un esempio nella prossima sezione). L'insieme stabile di f è l'insieme di tutti i punti $z \in U$ per cui l'*orbita* $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$ è ben definita. Se $z \in U \setminus K_f$, diremo che z (o la sua orbita) *evade* da U.

Siamo giunti al primo problema naturale della dinamica olomorfa locale:

(P1) *Descrivere la struttura topologica di K_f.*

Per esempio, può succedere che K_f abbia parte interna non vuota? Come vedremo nella Sezione 4, i sistemi dinamici olomorfi locali per cui p appartiene alla parte interna dell'insieme stabile hanno proprietà speciali; diremo che p è *stabile* per $f \in \mathrm{End}(M, p)$ se appartiene alla parte interna di K_f.

Osservazione 1.3: Sia la definizione di insieme stabile sia il Problema 1 (sia diverse altre definizioni e/o problemi che vedremo in seguito) hanno una natura topologica; si applicano invariate a sistemi dinamici locali che siano semplicemente continui. Vedremo però che le *risposte* a questi problemi dipenderanno fortemente dall'olomorfia del sistema dinamico.

L'insieme stabile K_f è evidentemente *completamente f-invariante*, cioè $f^{-1}(K_f) = K_f$ (per cui, in particolare, è anche *f-invariante*, nel senso che $f(K_f) \subseteq K_f$). Quindi la coppia (K_f, f) è un sistema dinamico discreto globale, e il secondo problema naturale della dinamica olomorfa locale è

(Q2) *Descrivere la struttura dinamica di (K_f, f).*

Per esempio, qual è il comportamento asintotico delle orbite? Convergono a p, o hanno un carattere caotico? Ci sono orbite dense? Esistono dei sottoinsiemi propri f-invarianti, cioè dei sottoinsiemi $L \subset K_f$ tali che $f(L) \subseteq L$? Se esistono, qual è la dinamica su di loro?

Per rispondere a tutte queste domande, la tecnica più efficiente è rimpiazzare f con un sistema dinamico discreto g "dinamicamente equivalente" e più semplice (per esempio, lineare). Nel nostro contesto, "dinamicamente equivalente" significa "localmente coniugato"; e dobbiamo considerare almeno tre tipi diversi di coniugazione.

Siano $f_1: U_1 \to M_1$ e $f_2: U_2 \to M_2$ due sistemi dinamici olomorfi locali in $p_1 \in M_1$ e $p_2 \in M_2$ rispettivamente. Diremo che f_1 e f_2 sono *olomorficamente* (rispettivamente, *topologicamente*) *localmente coniugati* se esistono intorni aperti $W_1 \subseteq U_1$ di p_1, $W_2 \subseteq U_2$ di p_2, e un biolomorfismo (rispettivamente, un omeomorfismo) $\varphi: W_1 \to W_2$ con $\varphi(p_1) = p_2$ tali che

$$f_1 = \varphi^{-1} \circ f_2 \circ \varphi \qquad \text{su} \qquad \varphi^{-1}\big(W_2 \cap f_2^{-1}(W_2)\big) = W_1 \cap f_1^{-1}(W_1)\ .$$

In particolare abbiamo

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f_1^k = \varphi^{-1} \circ f_2^k \circ \varphi \quad \text{su} \quad \varphi^{-1}\big(W_2 \cap \cdots \cap f_2^{-(k-1)}(W_2)\big) = W_1 \cap \cdots \cap f_1^{-(k-1)}(W_1)\ ,$$

per cui $K_{f_2|_{W_2}} = \varphi(K_{f_1|_{W_1}})$. Quindi la dinamica locale di f_1 vicino a p_1 è a tutti gli effetti equivalente alla dinamica locale di f_2 vicino a p_2.

Osservazione 1.4: Usando coordinate locali centrate in $p \in M$ si vede facilmente che ogni sistema dinamico olomorfo locale in p è olomorficamente localmente coniugato a un sistema dinamico olomorfo locale in $O \in \mathbb{C}^n$, dove $n = \dim M$. Quindi senza perdita di generalità potremo limitarci a studiare la dinamica degli elementi di $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$.

Ogni volta che si definisce una relazione d'equivalenza su una classe d'oggetti, si pone il problema della classificazione. Quindi il terzo problema naturale della dinamica olomorfa locale è

(P3) *Trovare una classe $\mathcal{F}$ (possibilmente piccola) di sistemi dinamici olomorfi locali in $O \in \mathbb{C}^n$ tale che ogni sistema dinamico olomorfo locale f in un punto di una varietà complessa n-dimensionale sia olomorficamente (rispettivamente, topologicamente) localmente coniugato a un (possibilmente) unico elemento di $\mathcal{F}$, detto* forma normale olomorfa *(rispettivamente,* topologica*) di f.*

Sfortunatamente, la classificazione olomorfa è spesso troppo complessa per essere utile; la famiglia $\mathcal{F}$ delle forme normali olomorfe potrebbe avere cardinalità più che numerabile. Una via alternativa consiste nel cercare invarianti invece di forme normali:

(P4) *Trovare un modo per associare a ciascun sistema dinamico olomorfo locale $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ una (possibilmente piccola) classe di oggetti (possibilmente esplicitamente calcolabili), detti* invarianti, *in modo che due sistemi dinamici olomorfi locali in O che siano olomorficamente localmente coniugati abbiano gli stessi invarianti. La classe di invarianti sarà detta* completa *se inoltre due sistemi dinamici olomorfi locali con gli stessi invarianti sono necessariamente olomorficamente localmente coniugati.*

Come notato prima, tutti i problemi che ci siamo posti finora hanno senso anche per sistemi dinamici locali che siano semplicemente continui; il prossimo problema invece ha senso solo per sistemi dinamici olomorfi.

Un sistema dinamico olomorfo locale in $O \in \mathbb{C}^n$ è dato da un elemento di $\mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_n\}^n$, lo spazio delle n-uple di serie di potenze convergenti in $z_1, \ldots, z_n$ senza termine costante. Lo spazio $\mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_n\}^n$ è un sottospazio dello spazio $\mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_n]]^n$ delle n-uple di serie di potenze formali senza termine costante. Un elemento $\Phi \in \mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_n]]^n$ ha un inverso (rispetto alla composizione) che appartiene ancora a $\mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_n]]^n$ se e solo se il suo termine lineare è un automorfismo lineare di $\mathbb{C}^n$. Diremo che due sistemi dinamici olomorfi locali f_1, $f_2 \in \mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_n\}^n$ sono *formalmente coniugati* se esiste una $\Phi \in \mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_n]]^n$ invertibile tale che $f_1 = \Phi^{-1} \circ f_2 \circ \Phi$ in $\mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_n]]^n$.

È chiaro che due sistemi dinamici olomorfi locali che siano olomorficamente localmente coniugati sono anche topologicamente localmente coniugati e formalmente coniugati. Il viceversa non è affatto vero, invece. Vedremo esempi di sistemi dinamici olomorfi locali che sono topologicamente localmente coniugati senza esserlo né olomorficamente localmente né formalmente; ed esempi di sistemi dinamici olomorfi locali che sono formalmente coniugati senza esserlo né olomorficamente localmente né topologicamente localmente. Quindi l'ultimo problema naturale della dinamica olomorfa locale che studieremo è

(P5) *Trovare forme normali e invarianti rispetto alla relazione di coniugazione formale per sistemi dinamici olomorfi locali in $O \in \mathbb{C}^n$.*

L'obiettivo di questo articolo è presentare alcuni dei risultati principali noti su questi problemi, cominciando con la situazione in una variabile.

2. Una variabile complessa: il caso iperbolico

Cominciamo studiando i sistemi dinamici olomorfi locali in $0 \in \mathbb{C}$. Come notato nella sezione precedente, un tale sistema è dato da una serie di potenze convergente f senza termine costante:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \in \mathbb{C}_0\{z\} .$$

Il numero $a_1 = f'(0)$ è usualmente detto *moltiplicatore* di f nell'origine. Notiamo fin da subito che il moltiplicatore è un invariante olomorfo e formale (ma non topologico): infatti $(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)'(0) = f'(0)$ per ogni biolomorfismo locale (o isomorfismo formale) φ.

Siccome $a_1 z$ è la migliore approssimazione lineare di f, è ragionevole aspettarsi che la dinamica locale di f dipenda fortemente dal valore di a_1. Per questo motivo introduciamo le definizioni seguenti:

- se $|a_1| < 1$ diremo che il punto fisso 0 è *attrattivo;*
- se $a_1 = 0$ diremo che il punto fisso 0 è *superattrattivo;*
- se $|a_1| > 1$ diremo che il punto fisso 0 è *repulsivo;*
- se $|a_1| \neq 0, 1$ diremo che il punto fisso 0 è *iperbolico;*
- se $a_1 \in S^1$ è una radice dell'unità, diremo che il punto fisso 0 è *parabolico* (o *razionalmente indifferente*);
- se $a_1 \in S^1$ non è una radice dell'unità, diremo che il punto fisso 0 è *ellittico* (o *irrazionalmente indifferente*).

Iniziamo studiando la dinamica nel caso di punto fisso iperbolico che, come vedremo subito, è piuttosto semplice. Si noti che se 0 è un punto fisso attrattivo per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ con moltiplicatore non nullo (discuteremo il caso superattrattivo fra poco), allora è un punto fisso repulsivo per la funzione inversa $f^{-1} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$.

Supponiamo allora che 0 sia attrattivo per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$, con moltiplicatore $a_1 \neq 0$. Allora possiamo scrivere $f(z) = a_1 z + O(z^2)$, con $0 < |a_1| < 1$; quindi possiamo trovare una costante grande $M > 0$, una costante piccola $\varepsilon > 0$ e un numero $0 < \delta < 1$ tali che $|z| < \varepsilon$ implichi

$$|f(z)| \leq (|a_1| + M\varepsilon)|z| \leq \delta |z| . \tag{2.1}$$

In particolare, se Δ_ε è il disco di centro 0 e raggio ε, abbiamo $f(\Delta_\varepsilon) \subset \Delta_\varepsilon$ per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, e l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\varepsilon}$ è tutto Δ_ε (in particolare, un punto fisso attrattivo unidimensionale è sempre stabile). Inoltre,

$$|f^k(z)| \leq \delta^k |z| \to 0$$

per $k \to +\infty$, e dunque ogni orbita che parte in Δ_ε è attratta dall'origine (che è il motivo del nome "attrattivo" per questo tipo di punti fissi).

Se invece 0 è un punto fisso repulsivo, un ragionamento analogo (o l'osservazione che 0 è attrattivo per f^{-1}) mostra che per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\varepsilon}$ si riduce alla sola origine: tutte le orbite (non banali) evadono.

Non è difficile vedere che la (2.1) implica anche che la successione f^k/a_1^k converge uniformemente sui compatti di Δ_ε a una funzione olomorfa $\varphi\colon \Delta_\varepsilon \to \mathbb{C}$ con $\varphi'(0) = 1$. In particolare, φ è un biolomorfismo in un intorno dell'origine. Inoltre,

$$\varphi \circ f = \lim_{k\to+\infty} \frac{f^{k+1}}{a_1^k} = a_1 \lim_{k\to+\infty} \frac{f^{k+1}}{a_1^{k+1}} = a_1 \varphi ,$$

per cui φ è una coniugazione olomorfa locale fra f e l'applicazione lineare $g(z) = a_1 z$. Infine, è facile dimostrare che g è topologicamente localmente coniugata alla funzione $g_<(z) = z/2$. Si noti però che se $a_1 \neq 1/2$ allora g *non* è olomorficamente coniugata a $g_<$, in quanto abbiamo già notato che il moltiplicatore è un invariante olomorfo.

Abbiamo sostanzialmente dimostrato il seguente risultato, che segnò l'inizio della teoria dei sistemi dinamici olomorfi:

Teorema 2.1: (Kœnigs, 1884 [Kœ]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale con un punto fisso iperbolico nell'origine di moltiplicatore $a_1 \in \mathbb{C}^* \setminus S^1$. Allora:*

(i) *f è olomorficamente localmente (e quindi formalmente) coniugato alla sua parte lineare $g(z) = a_1 z$. La coniugazione φ è unicamente determinata dalla condizione $\varphi'(0) = 1$.*
(ii) *Il moltiplicatore è un sistema completo di invarianti per la coniugazione olomorfa locale (o formale) di sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso iperbolico.*
(iii) *f è topologicamente localmente coniugato a $g_<(z) = z/2$ se $|a_1| < 1$, e a $g_>(z) = 2z$ se $|a_1| > 1$.*

Si noti che $g_<(z) = \frac{1}{2}z$ and $g_>(z) = 2z$ non possono essere topologicamente localmente coniugati, perché (per esempio) l'origine è stabile per $g_<$ ma non lo è per $g_>$.

Dunque la dinamica nel caso iperbolico unidimensionale è completamente chiara. Il caso superattrattivo può venire trattato in modo analogo. Se 0 è un punto fisso superattrattivo per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$, possiamo scrivere

$$f(z) = a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots$$

con $a_r \neq 0$; il numero $r \geq 2$ è l'*ordine* del punto superattrattivo. Un ragionamento simile a quello già visto mostra che per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\varepsilon}$ continua a essere tutto Δ_ε, e le orbite convergono (più velocemente rispetto al caso attrattivo) all'origine. Con un poco più di lavoro è possibile classificare completamente i sistemi dinamici olomorfi locali con un punto fisso superattrattivo, ottenendo il

Teorema 2.2: (Böttcher, 1904 [B]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale con un punto fisso superattrattivo di ordine $r \geq 2$ nell'origine. Allora:*

(i) *f è olomorficamente localmente (e quindi formalmente) coniugato alla funzione $g(z) = z^r$.*
(ii) *L'ordine è un insieme completo di invarianti, sia topologico sia olomorfo e formale, per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso superattrattivo.*

Abbiamo dunque delle risposte completamente soddisfacenti ai problemi (P1)–(P4) per sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso iperbolico o superattrattivo; vediamo ora cosa succede nel caso dei punti fissi parabolici.

3. Una variabile complessa: il caso parabolico

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale (non lineare) con un punto fisso parabolico nell'origine. Allora possiamo scrivere

$$f(z) = e^{2i\pi p/q} z + a_{r+1} z^{r+1} + a_{r+2} z^{r+2} + \cdots , \tag{3.1}$$

con $a_{r+1} \neq 0$, dove $p/q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ è il *numero di rotazione* di f, mentre $r + 1 \geq 2$ è la *molteplicità* di f.

Nella sezione precedente abbiamo visto che nel caso iperbolico era sempre possibile coniugare f alla sua parte lineare o, nel caso superattrattivo, quanto meno al primo termine non nullo nello sviluppo in serie di potenze. Nel caso parabolico, invece, questo è in generale impossibile:

Lemma 3.1: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale con un punto fisso parabolico di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i p/q}$ nell'origine. Allora f è olomorficamente (o topologicamente o formalmente) localmente coniugato alla sua parte lineare $g(z) = \lambda z$ se e solo se $f^q \equiv \mathrm{id}$.*

Infatti, se esiste un biolomorfismo (omeomorfismo, isomorfismo formale) φ tale che $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = g$, otteniamo $\varphi^{-1} \circ f^q \circ \varphi = g^q \equiv \mathrm{id}$, e quindi $f^q \equiv \mathrm{id}$. Viceversa, se $f^q \equiv \mathrm{id}$ poniamo

$$\varphi = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^j}{\lambda^j} ;$$

è facile verificare che φ è un biolomorfismo locale con $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ e $\varphi \circ f = g \circ \varphi$, come voluto.

Osservazione 3.1: Vale la pena di notare che abbiamo introdotto due delle tecniche più semplici per costruire un coniugio olomorfo locale fra due funzioni. Supponiamo di voler costruire un coniugio olomorfo locale fra f e g, con f e g invertibili nell'intorno dell'origine. Poniamo $\varphi_k = g^{-k} \circ f^k$. Se $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to +\infty$, è facile verificare che $\varphi \circ f = g \circ \varphi$, per cui φ è il coniugio cercato. Questa è stata la tecnica usata nella dimostrazione del Teorema 2.1, e può venire adattata in modo da fornire anche la dimostrazione del Teorema 2.2. Se la successione $\{\varphi_k\}$ non converge ma g è lineare (o, più in generale, lineare affine) si può provare un'altra strada. Poniamo

$$\psi_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} g^{-k} \circ f^k \;,$$

in modo da avere

$$\psi_k \circ f = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} g \circ (g^{-j} \circ f^j) - \frac{1}{k}g + \frac{1}{k}g^{-k+1} \circ f^k = g \circ \psi_k - \frac{1}{k}g + \frac{1}{k}g \circ (g^{-k} \circ f^k) \;,$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che g è lineare affine. Allora basta che esista una sottosuccessione convergente di $\{\psi_k\}$ per ottenere il coniugio desiderato. Una versione baby di questa tecnica è stata usata per dimostrare il Lemma 3.1, mentre per le dimostrazioni del Teorema 3.2 e della Proposizione 4.1 servirà la versione completa.

Una conseguenza immediata del lemma precedente è che se il numero di rotazione è 0 (cioè se il moltiplicatore è 1, e in tal caso diremo che f è *tangente all'identità*), allora f *non* può essere localmente coniugata all'identità (a meno che non fosse l'identità fin dall'inizio, caso dinamicamente non molto interessante). Più precisamente, l'insieme stabile di una f tangente all'identità non può mai essere un intorno dell'origine. Per avere un'idea del perché, consideriamo prima di tutto una funzione f_0 della forma

$$f_0(z) = z + az^{r+1} = z(1 + az^r)$$

per qualche $a \neq 0$ e $r + 1 \geq 2$. Scegliamo $v \in S^1 \subset \mathbb{C}$ in modo che av^r sia reale e positivo. Allora per ogni $c > 0$ si ha

$$f_0(cv) = c(1 + c^r av^r)v \in \mathbb{R}^+ v \;;$$

inoltre, $|f_0(cv)| > |cv|$. In altre parole, la semiretta $\mathbb{R}^+ v$ è f_0-invariante e respinta dall'origine, per cui $K_{f_0} \cap \mathbb{R}^+ v = \varnothing$. Viceversa, se av^r è reale e negativo allora il segmento $[0, |a|^{-1/r}]v$ è f_0-invariante e attratto dall'origine, per cui $[0, |a|^{-1/r}]v \subset K_{f_0}$. Di conseguenza, K_{f_0} non è un intorno dell'origine ma non si riduce neppure a $\{0\}$.

Questo esempio suggerisce la definizione seguente. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ della forma (3.1) e tangente all'identità. Diremo che un versore $v \in S^1$ è una *direzione attrattiva* (rispettivamente, *repulsiva*) per f nell'origine se $a_{r+1}v^r$ è reale e negativo (rispettivamente, positivo). Chiaramente, esistono esattamente r direzioni attrattive, uniformemente distribuite su S^1 e intervallate da esattamente r direzioni repulsive uniformemente distribuite: se $a_{r+1} = |a_{r+1}|e^{i\alpha}$, allora $v = e^{i\theta}$ è attrattiva (rispettivamente, repulsiva) se e solo se

$$\theta = \frac{2k+1}{r}\pi - \frac{\alpha}{r} \qquad \left(\text{rispettivamente, } \theta = \frac{2k}{r}\pi - \frac{\alpha}{r}\right) \;,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, una direzione repulsiva (attrattiva) per f è attrattiva (repulsiva) per f^{-1}.

Nel caso di f_0, abbiamo visto che se $v \in S^1$ è una direzione attrattiva allora esiste un segmento di punti la cui orbita tende all'origine nella direzione di v. Più in generale, se $v \in S^1$ è una direzione attrattiva per un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità f, il *bacino* centrato in v è l'insieme dei punti $z \in K_f \setminus \{0\}$ tali che $f^k(z) \to 0$ e $f^k(z)/|f^k(z)| \to v$ per $k \to +\infty$ (si noti che, a meno di rimpicciolire il dominio di f, possiamo assumere che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in K_f \setminus \{0\}$). Se z appartiene al bacino centrato in v, diremo che l'orbita di z *tende a* 0 *tangente a* v.

Una definizione un poco più specialistica (ma più utile) è la seguente: un *petalo attrattivo* centrato in una direzione attrattiva v è un aperto semplicemente connesso f-invariante $P \subseteq K_f \setminus \{0\}$ tale che un punto $z \in K_f \setminus \{0\}$ appartiene al bacino centrato in v se e solo se la sua orbita interseca P. In altre parole, l'orbita di un punto tende a 0 tangente a v se e solo se è definitivamente contenuta in P. Un *petalo repulsivo* (centrato in una direzione repulsiva) è invece un petalo attrattivo per l'inversa f^{-1} di f.

Il primo risultato decisamente non banale della teoria dei sistemi dinamici olomorfi locali è il famoso *Teorema del fiore di Leau-Fatou,* che dice, fra le altre cose, che i bacini centrati nelle direzioni attrattive sono esattamente le componenti connesse di $K_f \setminus \{0\}$:

Teorema 3.2: (Leau, 1897 [L]; Fatou, 1919-20 [F1, 2, 3]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r+1 \geq 2$ nell'origine. Siano $v_1, v_3, \ldots, v_{2r-1} \in S^1$ le r direzioni attrattive di f, e $v_2, v_4, \ldots, v_{2r} \in S^1$ le r direzioni repulsive, ordinate in senso antiorario. Allora:*

(i) *È possibile trovare per ogni direzione attrattiva (repulsiva) v_{2j-1} (v_{2j}) un petalo attrattivo P_{2j-1} (repulsivo P_{2j}) in modo che l'unione di questi petali assieme all'origine formi un intorno aperto dell'origine. Inoltre, i $2r$ petali sono sistemati ciclicamente in modo che si intersechino se e solo se l'angolo fra le loro direzioni centrali è π/r.*

(ii) *$K_f \setminus \{0\}$ è l'unione (disgiunta) dei bacini centrati nelle r direzioni attrattive.*

(iii) *Se B è un bacino centrato in una delle direzioni attrattive, allora esiste una funzione $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi \circ f(z) = \varphi(z) + 1$ per ogni $z \in B$. Inoltre, se P è il petalo corrispondente costruito nella parte* (i), *allora $\varphi|_P$ è un biolomorfismo fra P e un aperto del piano contenente un semipiano destro — per cui $f|_P$ è olomorficamente coniugata alla traslazione $z \mapsto z + 1$.*

La dimostrazione di questo teorema è tutt'altro che semplice; l'idea principale consiste nel trasferire il problema all'infinito. A meno di una coniugazione lineare, possiamo supporre $a_{r+1} = -1$, in modo che le direzioni attrattive siano le radici r-esime dell'unità. Fissato $\delta > 0$, l'insieme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^r - \delta| < \delta\}$ ha esattamente r componenti connesse, $P_{1,\delta}$, $P_{3,\delta} \ldots, P_{2r-1,\delta}$, ognuna simmetrica rispetto a una radice r-esima dell'unità. Sia $\psi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ data da

$$\psi(z) = \frac{1}{rz^r} ;$$

si verifica facilmente che è un biolomorfismo fra un intorno di ciascun $P_{j,\delta}$ e un intorno del semipiano destro $H_\delta = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, w > 1/(2r\delta)\}$. Inoltre, per $|w|$ abbastanza grande la composizione $F = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$ ha senso, e si ha

$$F(w) = w + 1 + O(w^{-1/r}) . \tag{3.2}$$

Con queste informazioni è possibile dimostrare che per δ abbastanza piccolo i $P_{j,\delta}$ sono effettivamente dei petali, anche se è necessario allargarli lievemente per ottenere un intorno bucato dell'origine. Infine, una versione particolarmente sofisticata delle tecniche descritte nell'Osservazione 3.1 permette di modificare ψ in modo da eliminare il termine $O(w^{-1/r})$ in (3.2), ottenendo una effettiva coniugazione fra f e la traslazione $z \mapsto z + 1$ in ciascun petalo.

Il Teorema del fiore di Leau-Fatou ci fornisce una descrizione completa della dinamica in un intorno dell'origine. Quasi sessant'anni dopo Fatou, Camacho ha inoltre dimostrato che è possibile estrarre da questa dimostrazione la classificazione topologica completa dei sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità:

Teorema 3.3: (Camacho, 1978 [C]; Shcherbakov, 1982 [S]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r+1 \geq 2$ nell'origine. Allora f è topologicamente localmente coniugato alla funzione*

$$z \mapsto z - z^{r+1} .$$

In particolare, la molteplicità è un sistema completo di invarianti topologici per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità.

La classificazione formale si ottiene con un semplice conto (vedi, per esempio, [Mi]), ma, forse sorprendentemente, è diversa dalla classificazione topologica:

Proposizione 3.4: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r + 1 \geq 2$ nell'origine. Allora f è formalmente coniugata alla funzione*

$$g(z) = z - z^{r+1} + \beta z^{2r+1} , \tag{3.3}$$

dove $\beta \in \mathbb{C}$ è un invariante formale (e olomorfo) dato da

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - f(z)} , \tag{3.4}$$

e l'integrale è fatto lungo un piccolo ciclo positivo γ attorno all'origine.

Il numero β dato da (3.4) è detto *indice* di f nel punto fisso. In particolare, quindi, molteplicità e indice formano un sistema completo di invarianti formali per i sistemi dinamici olomorfi discreti unidimensionali tangenti all'identità.

La classificazione olomorfa è incredibilmente più complicata: come dimostrato da Voronin [V] and Écalle [É1, 2] in 1981, dipende da invarianti funzionali. Cercheremo ora di descriverla a grandi linee, rimandando a [I2] (e agli articoli originali; vedi anche [K]) per i dettagli.

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità con molteplicità $r + 1$ nell'origine; a meno di un cambiamento lineare di coordinate possiamo supporre che $a_{r+1} = 1$. Siano $P_1, \ldots, P_{2r}$ dei petali con le proprietà indicate nel Teorema 3.2.(i), ordinati in modo che P_{2r} sia centrato sul semiasse reale positivo, e gli altri seguano ciclicamente in senso antiorario. Indichiamo con F_j il biolomorfismo dato dal Teorema 3.2.(iii) — applicato a f^{-1} per i petali repulsivi — che coniuga $f|_{P_j}$ con la traslazione $z \mapsto z + 1$ in un semipiano destro (se j è dispari) o sinistro (se j è pari). Se inoltre richiediamo che

$$F_j(z) = -\frac{1}{rz^r} + \beta \log z + o(1) , \tag{3.5}$$

dove $\beta \in \mathbb{C}$ è l'indice di f nell'origine, allora F_j è univocamente determinato. Dunque negli insiemi $F_j(P_j \cap P_{j+1})$ possiamo considerare la composizione $\tilde{\Phi}_j = F_{j+1} \circ F_j^{-1}$. Si vede che $\tilde{\Phi}_j(w + 1) = \tilde{\Phi}_j(w) + 1$ per $j = 1, \ldots, 2r - 1$, e quindi $\psi_j = \tilde{\Phi}_j - \mathrm{id}$ è una funzione olomorfa periodica di periodo 1 (per $j = 2r$ dobbiamo però prendere $\psi_{2r} = \tilde{\Phi}_{2r} - \mathrm{id} + 2\pi i\beta$ per ottenere una funzione periodica di periodo 1). Ciascuna ψ_j può essere estesa a un opportuno semipiano superiore (se j è dispari) o inferiore (se j è pari). Inoltre, si può dimostrare che le funzioni $\psi_1, \ldots, \psi_{2r}$ sono decrescenti esponenzialmente all'infinito, nel senso che sono limitate in modulo da $\exp(-c|w|)$ per $|\operatorname{Im} w| \to +\infty$, dove $c > 0$ dipende da f.

Ora, se $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ è coniugata olomorficamente localmente a f, e indichiamo con G_j i corrispondenti biolomorfismi, si può dimostrare che $F_j \circ G_j^{-1} = \mathrm{id} + a$ per un opportuno $a \in \mathbb{C}$ indipendente da j. Questo suggerisce di introdurre una relazione d'equivalenza sull'insieme delle $2r$-uple di funzioni del tipo di $(\psi_1, \ldots, \psi_{2r})$.

Indichiamo con M_r l'insieme delle $2r$-uple $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{2r})$ di funzioni olomorfe periodiche di periodo 1, con ψ_j definita su un opportuno semipiano superiore (se j è dispari) o inferiore (se j è pari), e decrescenti esponenzialmente all'infinito. Diremo che $\psi, \tilde{\psi} \in M_r$ sono *equivalenti* se esiste $a \in \mathbb{C}$ tale che $\tilde{\psi}_j = \psi_j \circ (\mathrm{id} + a)$ per $j = 1, \ldots, 2r$, e sia $\mathcal{M}_r$ l'insieme quoziente delle classi d'equivalenza.

La procedura descritta sopra permette di associare a ogni $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità con molteplicità $r + 1$ un elemento $\mu_f \in \mathcal{M}_r$, detto *invariante settoriale*. La classificazione olomorfa di Ècalle e Voronin allora è:

Teorema 3.5: (Écalle, 1981 [É1, 2]; Voronin, 1981 [V]) *La molteplicità, l'indice e l'invariante settoriale formano un sistema completo di invarianti olomorfi per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità. Inoltre, per ogni $r \geq 1$, $\beta \in \mathbb{C}$ e $\mu \in \mathcal{M}_r$ esiste $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità con molteplicità $r + 1$, indice β e invariante settoriale μ.*

Per una traccia della dimostrazione e una descrizione più geometrica dell'invariante settoriale si vedano anche [I2] e [M1, 2].

Osservazione 3.2: In particolare, i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità forniscono esempi di sistemi dinamici locali che sono topologicamente localmente coniugati senza esserlo né olomorficamente né formalmente, e di sistemi dinamici olomorfi locali che sono formalmente coniugati senza esserlo olomorficamente.

Infine, se $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ ha numero di rotazione p/q, allora f^q è tangente all'identità. Quindi possiamo applicare quanto appena visto a f^q e dedurne informazioni sulla dinamica della f originale. Qui ci limitiamo a elencare alcuni risultati; dimostrazioni e ulteriori dettagli si possono trovare in [Mi], [Ma], [C], [É1, 2] e [V].

Proposizione 3.6: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i p/q}$, con numero di rotazione p/q ridotto ai minimi termini. Supponiamo che $f^q \not\equiv \mathrm{id}$. Allora esistono $n \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{C}$ tali che f sia formalmente coniugato a*

$$g(z) = \lambda z + z^{nq+1} + \beta z^{2nq+1}.$$

Proposizione 3.7: (Camacho) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i p/q}$, con numero di rotazione p/q ridotto ai minimi termini. Supponiamo che $f^q \not\equiv \mathrm{id}$. Allora esiste $n \geq 1$ tale che f sia topologicamente localmente coniugato a*

$$g(z) = \lambda z + z^{nq+1}.$$

Teorema 3.8: (Leau-Fatou) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i p/q}$, con numero di rotazione p/q ridotto ai minimi termini. Supponiamo che $f^q \not\equiv \mathrm{id}$. Allora esiste $n \geq 1$ tale che f^q abbia molteplicità $nq + 1$, e f agisce sui petali attrattivi (rispettivamente, repulsivi) di f^q come una permutazione composta da n cicli disgiunti. Infine, $K_f = K_{f^q}$.*

4. Una variabile complessa: il caso ellittico

Per completare lo studio dei sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali ci rimane da affrontare il caso ellittico:

$$f(z) = e^{2\pi i\theta} z + a_2 z^2 + \cdots \in \mathbb{C}_0\{z\}\ , \tag{4.1}$$

con $\theta \notin \mathbb{Q}$. Come vedremo, la dinamica dipenderà principalmente dalle proprietà aritmetiche di θ. Infatti, il succo dei risultati di Cremer, Siegel, Bryuno e Yoccoz che presenteremo in questa sezione è che esiste un sottoinsieme $B \subset [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, di misura piena e che può essere definito in termini di approssimabilità dai razionali, tale che tutti i sistemi dinamici olomorfi locali della forma (4.1) con $\theta \in B$ sono *olomorficamente linearizzabili,* cioè olomorficamente localmente coniugati alla loro parte lineare, la rotazione irrazionale $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$. Viceversa, il complementare $([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \setminus B$ è un insieme G_δ-denso, tale che se $\theta \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \setminus B$ allora il polinomio quadratico $z \mapsto z^2 + e^{2\pi i\theta} z$ non è olomorficamente linearizzabile.

La prima osservazione signficativa è che la tecnica descritta nell'Osservazione 3.1 permette di dimostrare una caratterizzazione topologica dei sistemi dinamici olomorfi locali con punto fisso non iperbolico olomorficamente linearizzabili:

Proposizione 4.1: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore $\lambda \in S^1$. Allora f è olomorficamente linearizzabile se e solo se è topologicamente linearizzabile se e solo se 0 è stabile per f.*

Infatti, se 0 è stabile per f, la famiglia $\{\psi_k\}$ introdotta nell'Osservazione 3.1. è uniformemente limitata su un intorno aperto dell'origine, e quindi (per il teorema di Montel) ammette una sottosuccessione convergente.

La seconda osservazione chiave è che due sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso ellittico e uguale moltiplicatore sono sempre formalmente coniugati:

Proposizione 4.2: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i\theta} \in S^1$, con $\theta \notin \mathbb{Q}$. Allora f è formalmente coniugata alla sua parte lineare.*

Infatti, si dimostra con un semplice conto che esiste un'unica serie formale

$$h(z) = z + h_2 z^2 + h_3 z^3 + \cdots \in \mathbb{C}[[z]] \tag{4.2}$$

tale che $h(\lambda z) = f\bigl(h(z)\bigr)$. Inoltre, se f è scritto come in (4.1), i coefficienti di h sono della forma

$$h_j = \frac{a_j + X_j(h_2, \ldots, h_{j-1})}{\lambda^j - \lambda}\ , \tag{4.3}$$

dove $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, e X_j è un polinomio. In particolare, h_j dipende solo da λ e da $a_2, \ldots, a_j$.

Dunque il sistema dinamico f è olomorficamente (e topologicamente) linearizzabile se e solo se la serie formale h data da (4.2) converge in un qualche intorno dell'origine. Grazie a (4.3), il raggio di convergenza di h dipende dal comportamento di $|\lambda^j - \lambda| = |\lambda^{j-1} - 1|$: se questa differenza diventa troppo piccola (anche se non può mai annullarsi, in quanto λ non è una radice dell'unità), la serie che definisce h non può convergere. Questo è noto come il *problema dei piccoli divisori* in questo contesto.

Vogliamo allora introdurre una misura di quanto piccola possa diventare la differenza $|\lambda^k - 1|$. Ci sono vari modi per farlo; il più semplice consiste nel porre

$$\Omega_\lambda(m) = \min_{1\le k\le m} |\lambda^k - 1| ,$$

per $\lambda \in S^1$ e $m \ge 1$. Chiaramente, λ è una radice m_0-esima dell'unità se e solo se $\Omega_\lambda(m) = 0$ per ogni $m \ge m_0$; inoltre,

$$\lim_{m\to+\infty} \Omega_\lambda(m) = 0$$

per tutti i $\lambda \in S^1$, in quanto è ben noto che se $\lambda \in S^1$ non è una radice dell'unità allora l'insieme $\{\lambda^k\}$ delle potenze di λ è denso in S^1.

La prima dimostrazione dell'esistenza di sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso ellittico non olomorficamente linearizzabili è stata ottenuta da Cremer nel 1927, in [Cr1]. Il suo risultato più generale è il seguente:

Teorema 4.3: (Cremer, 1938 [Cr2]) *Sia $\lambda \in S^1$ tale che*

$$\limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{\Omega_\lambda(m)} = +\infty . \tag{4.4}$$

Allora esiste $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ che non è olomorficamente linearizzabile. Inoltre, l'insieme dei $\lambda \in S^1$ che soddisfano (4.4) *contiene un insieme G_δ-denso.*

La costruzione di f è piuttosto semplice: basta scegliere induttivamente $a_j \in \{0, 1\}$ in modo che $|a_j + X_j| \ge 1/2$ per ogni $j \ge 2$, dove X_j è come in (4.3). Allora

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$$

appartiene a $\mathbb{C}_0\{z\}$, mentre (4.4) implica che il raggio di convergenza della linearizzazione formale di f è 0, per cui f non può essere olomorficamente linearizzabile.

L'insieme dei $\theta \in [0, 1]$ tali che $\lambda = e^{2\pi i\theta} \in S^1$ soddisfi (4.4) contiene numeri irrazionali particolarmente ben approssimabili dai razionali. Infatti, non è difficile vedere che se $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ è tale che per ogni $q_0 \ge 2$ esiste $p/q \in \mathbb{Q}$ ridotta ai minimi termini con $q \ge q_0$ e tale che

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2^{q!}} , \tag{4.5}$$

allora $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ soddisfa (4.4) (e l'insieme di questi θ è un G_δ-denso).

Dunque se $\Omega_\lambda(m)$ tende a zero molto velocemente allora esistono sistemi dinamici olomorfi locali di moltiplicatore λ non olomorficamente linearizzabili. Viceversa, Siegel nel 1942 ha dimostrato che se $\Omega_\lambda(m)$ tende a zero abbastanza lentamente, allora ogni sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ è olomorficamente linearizzabile:

Teorema 4.4: (Siegel, 1942 [Si]) *Sia $\lambda \in S^1$ tale che esistano $\beta > 1$ e $\gamma > 0$ per cui*

$$\forall m \ge 2 \qquad \frac{1}{\Omega_\lambda(m)} \le \gamma\, m^\beta . \tag{4.6}$$

Allora ogni $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ è olomorficamente linearizzabile. Inoltre, l'insieme dei $\lambda \in S^1$ che soddisfano (4.6) *per qualche $\beta > 1$ e $\gamma > 0$ ha misura di Lebesgue piena in S^1.*

Osservazione 4.1: È interessante notare che per $\lambda \in S^1$ generico (in senso topologico) esiste un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ non linearizzabile, mentre per quasi tutti (in senso di teoria della misura) i $\lambda \in S^1$ ogni sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ è linearizzabile.

La dimostrazione originale del Teorema 4.4 usa la tecnica della serie maggiorante, che consiste nel trovare una serie convergente i cui coefficienti siano maggiori o uguali di quelli della linearizzazione formale. Altre dimostrazioni si ottengono come applicazione del cosiddetto metodo di Kolmogorov-Arnold-Moser (o metodo KAM); si veda [HK] o [A3].

Chiaramente, fra la condizione di Siegel (4.6) e quella di Cremer (4.4) c'è abbondante spazio di manovra; è naturale chiedersi se esista una condizione su λ, sempre di natura aritmetica, necessaria e sufficiente perché ogni sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ sia olomorficamente linearizzabile (o, come diremo, che abbia l'origine come *punto di Siegel;* se $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ con $\lambda = e^{2\pi i\theta} \in S^1$ ha $\theta \notin \mathbb{Q}$ ma non è olomorficamente linearizzabile, diremo invece che l'origine è un *punto di Cremer* per f). La risposta è contenuta nel celebre *Teorema di Bryuno-Yoccoz:*

Teorema 4.5: (Bryuno, 1965 [Bry1, 2, 3], Yoccoz, 1988 [Y1, 2]) *Sia $\lambda \in S^1$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *l'origine è un punto di Siegel per il polinomio quadratico $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$;*
(ii) *l'origine è un punto di Siegel per tutte le $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ;*
(iii) *il numero λ soddisfa la* condizione di Bryuno

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \log \frac{1}{\Omega_\lambda(2^{k+1})} < +\infty \,. \tag{4.7}$$

Bryuno, usando il metodo della serie maggiorante (vedi anche [He] e relativa bibliografia) ha dimostrato che la condizione (iii) implica la condizione (ii). Yoccoz, usando un brillante approccio geometrico basato sulle applicazioni quasi-conformi, ha invece dimostrato che (i) è equivalente a (ii), e che (ii) implica (iii), cioè che se λ non soddisfa (4.7) allora l'origine è un punto di Cremer per qualche $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ — e dunque è un punto di Cremer per il polinomio quadratico $f_\lambda(z)$. Si veda anche [P9] per risultati correlati.

Osservazione 4.2: La condizione (4.7) è di solita espressa in maniera diversa. Posto $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, sia $\{p_k/q_k\}$ la successione di numeri razionali convergente a θ data dall'espansione in frazioni continue. Allora (4.7) è equivalente a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q_k} \log q_{k+1} < +\infty \,,$$

mentre (4.6) equivale a $q_{n+1} = O(q_n^\beta)$, e (4.4) è equivalente a

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{q_k} \log q_{k+1} = +\infty \,.$$

Si vedano [He], [Y2] e relativa bibliografia per i dettagli.

Dunque se 0 è un punto di Siegel per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ la dinamica locale di f è completamente descritta. Invece, se 0 è un punto di Cremer per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$, la dinamica locale di f è incredibilmente complicata e ancora non del tutto chiarita. Pérez-Marco (in [P2, 4, 5, 6, 7]) ha studiato la topologia e la dinamica dell'insieme stabile in questo caso. Alcuni dei suoi risultati sono riassunti nel seguente

Teorema 4.6: (Pérez-Marco, 1995 [P6, 7]) *Supponiamo che* 0 *sia un punto di Cremer per il sistema dinamico olomorfo locale $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$. Allora:*

(i) *L'insieme stabile K_f è compatto, connesso, pieno (cioè $\mathbb{C} \setminus K_f$ è connesso), non si riduce al solo $\{0\}$, e non è localmente connesso in alcun punto diverso dall'origine.*
(ii) *Tutti i punti di $K_f \setminus \{0\}$ sono ricorrenti (cioè punti di accumulazione della loro orbita).*
(iii) *Esiste un'orbita in K_f che si accumula sull'origine, ma nessuna orbita non banale converge all'origine.*

Osservazione 4.3: In particolare, se $\lambda \in S^1$ non è una radice dell'unità e non soddisfa la condizione di Bryuno (4.7), possiamo trovare f_1, $f_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ tali che f_1 sia olomorficamente linearizzabile e f_2 non lo sia. Quindi f_1 e f_2 sono formalmente coniugati senza essere né olomorficamente né topologicamente localmente coniugati.

Osservazione 4.4: Ch'io sappia, a tutt'oggi non esiste ancora una classificazione topologica od olomorfa completa dei sistemi dinamici olomorfi locali con un punto di Cremer. Bisogna però dire che la classificazione olomorfa potrebbe non essere fattibile: Yoccoz [Y2] ha dimostrato che se $\lambda \in S^1$ non è una radice dell'unità e non soddisfa la condizione di Bryuno (4.7) allora esiste una famiglia più che numerabile di elementi di $\mathrm{End}(\mathbb{C}, O)$ di moltiplicatore λ che non sono a due a due olomorficamente localmente coniugati, né olomorficamente localmente coniugati ad alcuna funzione intera.

Altri risultati sulla dinamica nell'intorno di un punto di Cremer sono contenuti in [P1, 3].

5. Più variabili complesse: il caso iperbolico

Il resto di questo articolo è dedicato alla dinamica locale in più variabili complesse, in cui la teoria è molto meno completa rispetto al caso unidimensionale.

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale in $O \in \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$. Possiamo scrivere f usando la cosiddetta *espansione omogenea*

$$f(z) = P_1(z) + P_2(z) + \cdots \in \mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_n\}^n ,$$

dove P_j è una n-upla di polinomi omogenei di grado j. In particolare, P_1 è il differenziale df_O di f nell'origine, e f è localmente invertibile se e solo se P_1 è invertibile.

Abbiamo visto che in dimensione uno la derivata nell'origine svolge un ruolo fondamentale. In dimensione maggiore, è naturale pensare che siano gli autovalori del differenziale nell'origine a svolgere un ruolo analogo. Introduciamo quindi le definizioni seguenti:

- se tutti gli autovalori di df_O hanno modulo minore di 1, diremo che il punto fisso O è *attrattivo;*
- se tutti gli autovalori di df_O hanno modulo maggiore di 1, diremo che il punto fisso O è *repulsivo;*
- se tutti gli autovalori di df_O hanno modulo diverso da 1, diremo che il punto fisso O è *iperbolico;* (si noti che l'autovalore nullo è permesso);
- se tutti gli autovalori di df_O sono radici dell'unità, diremo che il punto fisso O è *parabolico;* in particolare, se $df_O = \mathrm{id}$ diremo che f è *tangente all'identità;*
- se gli autovalori di df_O sono uguali a 1 o in modulo minori di 1, diremo che il punto fisso O è *semiattrattivo;*
- se tutti gli autovalori di df_O hanno modulo uguale a 1, ma nessuno è una radice dell'unità, diremo che il punto fisso O è *ellittico;*
- se $df_O = O$, diremo che il punto fisso O è *superattrattivo.*

Sono chiaramente possibili anche altri casi, ma per i nostri scopi questa lista è sufficiente. In questo articolo discuteremo principalmente i punti fissi iperbolici e parabolici; nell'ultima sezione presenteremo anche qualche risultato valido in altri casi.

Supponiamo allora che l'origine sia un punto fisso iperbolico per una $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ non necessariamente invertibile. Allora abbiamo uno spezzamento canonico

$$\mathbb{C}^n = E^s \oplus E^u ,$$

dove E^s (rispettivamente, E^u) è la somma diretta degli autospazi generalizzati associati agli autovalori di df_O di modulo strettamente minore (rispettivamente, maggiore) di 1. Il primo risultato principale in questo caso è il famoso *Teorema della varietà stabile* (dimostrato originariamente da Perron [Pe] e Hadamard [H]; si veda [FHY, HK, HPS, Pes, Sh] per dimostrazioni nel caso C^∞, Wu [Wu] per una dimostrazione nel caso olomorfo, e [A3] per una dimostrazione nel caso non-invertibile):

Teorema 5.1: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale con un punto fisso iperbolico nell'origine. Allora:*

(i) *l'insieme stabile K_f è una sottovarietà complessa di (un intorno dell'origine in) $\mathbb{C}^n$, tangente a E^s in O;*

(ii) *esiste una sottovarietà complessa W_f di (un intorno dell'origine in) $\mathbb{C}^n$, chiamata* insieme instabile *di f, tangente a E^u in O, tale che $f|_{W_f}$ è invertibile, $f^{-1}(W_f) \subseteq W_f$, e $z \in W_f$ se e solo se esiste una successione $\{z_{-k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ nel dominio di f tale che $z_0 = z$ e $f(z_{-k}) = z_{-k+1}$ per ogni $k \geq 1$. Inoltre, se f è invertibile allora W_f è l'insieme stabile di f^{-1}.*

Esistono molte dimostrazioni di questo teorema; una delle più comuni (si veda [Sh]) recupera K_f e W_f come punti fissi di opportuni operatori in uno spazio di Banach infinito dimensionale.

Osservazione 5.1: Quando l'origine è un punto fisso attrattivo, si ha $E^s = \mathbb{C}^n$, e K_f è un intorno aperto dell'origine, il suo *bacino di attrazione*. Vedremo però che, contrariamente al caso di una variabile, non è detto che f sia olomorficamente linearizzabile, neppure quando è invertibile. Viceversa, se l'origine è un punto fisso repulsivo allora $E^u = \mathbb{C}^n$, e $K_f = \{O\}$. Di nuovo, però, non tutti i sistemi dinamici olomorfi locali con un punto fisso repulsivo sono olomorficamente linearizzabili.

Se un punto nel dominio U di un sistema dinamico olomorfo locale con un punto fisso iperbolico non appartiene né all'insieme stabile né all'insieme instabile, allora evade da U sia nel futuro (cioè la sua orbita evade da U) sia nel passato (cioè non è il punto terminale di un'orbita infinita contenuta in U). In un certo senso, possiamo pensare agli insiemi stabile e instabile (o, con la terminologia usuale in questo contesto, alle *varietà* stabile e instabile) come fossero dei sottospazi coordinati un po' curvi, e le orbite al di fuori di questi sottospazi coordinati seguono dei cammini di forma iperbolica, entrando e uscendo da un qualsiasi intorno dell'origine in un tempo finito — e questo è probabilmente uno dei motivi per il nome "iperbolico" attribuito a questo tipo di punti fissi.

A dire il vero, questa idea di raddrizzare le varietà stabile e instabile fino a portarli a essere degli effettivi sottospazi coordinati può essere realmente implementata (almeno nel caso invertibile), producendo una delle possibili dimostrazioni (si veda [HK, Sh, A3] e relativa bibliografia) del *Teorema di Grobman-Hartman:*

Teorema 5.2: (Grobman, 1959 [G1, 2]; Hartman, 1960 [Har]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale invertibile con un punto fisso iperbolico. Allora f è topologicamente localmente coniugato al suo differenziale df_O.*

Quindi, almeno dal punto di vista topologico, la dinamica nell'intorno di un punto fisso iperbolico invertibile è completamente chiara. Se invece il sistema dinamico olomorfo locale non è invertibile la situazione è molto più oscura. Per esempio, Hubbard and Papadopol [HP] hanno notato che un teorema analogo al teorema di Böttcher per punti fissi superattrattivi in più variabili complesse non può essere vero: ci sono sistemi dinamici olomorfi locali con un punto fisso superattrattivo che non sono neppure topologicamente localmente coniugati al primo termine non nullo della loro espansione omogenea. Recentemente, Favre e Jonsson [FJ] hanno iniziato uno studio molto dettagliato dei punti fissi superattrattivi in $\mathbb{C}^2$, studio che dovrebbe condurre alla loro classificazione topologica.

La classificazione olomorfa e persino quella formale non sono altrettanto semplici, anche nel caso invertibile. Il problema principale è che, se indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gli autovalori di df_O, può succedere che si abbia

$$\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} - \lambda_j = 0 \tag{5.1}$$

per qualche $1 \le j \le n$ e qualche $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ con $k_1 + \cdots + k_n \ge 2$; una relazione di questa forma è detta *risonanza* di f. Se $n = 1$ ci sono risonanze solo se il moltiplicatore è una radice dell'unità o zero; ma se $n > 1$ ci possono essere risonanze anche nel caso iperbolico.

Un conto analogo a quello necessario per dimostrare la Proposizione 4.2 mostra che i coefficienti di una eventuale serie formale linearizzante f hanno denominatori della forma $\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} - \lambda_j$. Quindi le risonanze impediscono la linearizzabilità formale, e non è difficile vedere che questa è l'unica ostruzione:

Proposizione 5.3: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale invertibile senza risonanze. Allora f è formalmente coniugato al suo differenziale df_O.*

In presenza di risonanze, la classificazione formale si complica alquanto e, a mia conoscenza, non è ancora stata completata. Per descrivere cosa è noto, diremo che un monomio $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ nella j-esima coordinata di f è *risonante* se $k_1 + \cdots + k_n \ge 2$ e $\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} = \lambda_j$. Allora vale la seguente generalizzazione della Proposizione 5.3 (si veda Arnold [Ar] per una dimostrazione):

Proposizione 5.4: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale invertibile. Allora f è formalmente coniugata a una $g \in \mathbb{C}_0[[z_1, \ldots, z_n]]^n$ tale che dg_O sia in forma canonica di Jordan, e g abbia solo monomi risonanti.*

Ogni serie formale g con queste proprietà è detta *forma normale* (o, talvolta, *prenormale*) *di Poincaré-Dulac* di f.

Il problema con le forme normali di Poincaré-Dulac è che non sono uniche. In particolare, ci si può chiedere se è sempre possibile trovare una forma normale con solo un numero finito di monomi risonanti (come accadeva, per esempio, nella Proposizione 3.4). Questo si può sicuramente fare (si veda, per esempio, Reich [R1]) quando df_O appartiene al cosiddetto *dominio di Poincaré,* cioè quando df_O è invertibile e O è attrattivo o repulsivo. Quando O è iperbolico e df_O è invertibile ma non appartiene al dominio di Poincaré, diremo che df_O appartiene al *dominio di Siegel*; in questo caso, ch'io sappia, il problema di trovare forme normali formali canoniche è ancora aperto (ma si vedano [ÉS], [ÉV], [CR] e relativa bibliografia per risultati recenti in questa direzione).

Vale la pena di notare che, nel caso iperbolico, il problema della linearizzazione formale è equivalente al problema della linearizzazione C^∞. Infatti Sternberg [St1, 2] e Chaperon [Ch] hanno dimostrato il seguente:

Teorema 5.5: (Sternberg, 1957 [St1, 2]; Chaperon, 1986 [Ch]) *Siano $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ due sistemi dinamici olomorfi locali, e assumiamo che f sia invertibile con un punto fisso iperbolico nell'origine. Allora f e g sono formalmente coniugati se e solo se sono localmente coniugati tramite un diffeomorfismo C^∞. In particolare, f è linearizzabile C^∞ se e solo se è formalmente linearizzabile. Di conseguenza, se non ci sono risonanze allora f è linearizzabile C^∞.*

Anche in assenza di risonanze, la linearizzabilità olomorfa non è garantita, in quanto può verificarsi un problema di piccoli divisori. Il risultato più semplice è dovuto a Poincaré che, usando la tecnica della serie maggiorante, ha dimostrato il seguente

Teorema 5.6: (Poincaré, 1893 [Po]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale con df_O nel dominio di Poincaré. Allora f è olomorficamente linearizzabile se e solo se è formalmente linearizzabile. In particolare, se non ci sono risonanze allora f è olomorficamente linearizzabile.*

Reich [R2] descrive delle forme normali olomorfe quando df_O appartiene al dominio di Poincaré e ci sono risonanze (si veda anche [ÉV]); Pérez-Marco [P8] discute il problema della linearizzazione olomorfa in presenza di risonanze.

Quando df_O appartiene al dominio di Siegel, anche in assenza di risonanze, la linearizzazione formale può divergere. Per descrivere i risultati noti, introduciamo una naturale generalizzazione a più variabili delle $\Omega_\lambda(m)$ viste nella scorsa sezione:

$$\Omega_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(m) = \min\bigl\{|\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n} - \lambda_j| \bigm| k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N},\, 2 \le k_1+\cdots+k_n \le m,\, 1 \le j \le n\bigr\}$$

per $m \ge 2$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$. Se $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sono gli autovalori di df_O, scriveremo spesso $\Omega_f(m)$ al posto di $\Omega_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(m)$.

È chiaro che $\Omega_f(m) \ne 0$ per ogni $m \ge 2$ se e solo se non ci sono risonanze. Inoltre, non è difficile dimostrare che se df_O appartiene al dominio di Siegel allora

$$\lim_{m\to+\infty} \Omega_f(m) = 0\;;$$

quindi abbiamo di nuovo un fenomeno di piccoli divisori, ed è questo il motivo per cui, anche in assenza di risonanze, la linearizzazione formale può divergere. I risultati migliori in questo caso, sia positivi che negativi, sono ancora dovuti a Bryuno [Bry2, 3], e sono la naturale generalizzazione dei loro analoghi unidimensionali:

Teorema 5.7: (Bryuno, 1971 [Bry2, 3]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale tale che df_O sia diagonalizzabile e non abbia risonanze. Supponiamo inoltre che*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \log \frac{1}{\Omega_f(2^{k+1})} < +\infty\;. \tag{5.2}$$

Allora f è olomorficamente linearizzabile.

Teorema 5.8: (Bryuno, 1971 [Bry2, 3]) *Siano $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ senza risonanze e tali che*

$$\limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{\Omega_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(m)} = +\infty\;.$$

Allora esiste $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ con $df_O = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ non olomorficamente linearizzabile.

Vale la pena di notare esplicitamente che, contrariamente al caso unidimensionale, non è noto se (5.2) sia necessaria per la linearizzabilità olomorfa di tutti i sistemi dinamici olomorfi locali con dato differenziale appartenente al dominio di Siegel. Si veda inoltre Pöschel [Pö] per una generalizzazione del Teorema 5.7, e Il'yachenko [I1] per un risultato importante collegato al Teorema 5.8. Infine, risultati nello spirito del Teorema 5.7 ma senza assumere la diagonalizzabilità del differenziale sono discussi in [DG].

6. Più variabili complesse: il caso parabolico

Nello studio dei punti fissi parabolici in più variabili complesse la prima domanda naturale è se vale un analogo del teorema del fiore di Leau-Fatou, e in che forma. Per descrivere cosa è noto al riguardo, in questa sezione ci limiteremo a discutere sistemi dinamici olomorfi locali tangenti all'identità; punti parabolici più generali possono essere ricondotti a questo caso considerando un'iterata opportuna (ma si veda anche la fine di questa sezione per risultati validi quando il differenziale nel punto fisso non è diagonalizzabile).

Dunque vogliamo studiare la dinamica locale di un sistema dinamico olomorfo locale $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ della forma

$$f(z) = z + P_\nu(z) + P_{\nu+1}(z) + \cdots \in \mathbb{C}_0\{z_1, \ldots, z_n\}^n \;, \tag{6.1}$$

dove P_ν è il primo termine non nullo nell'espansione omogenea di f; il numero $\nu \geq 2$ è l'*ordine* di f.

Una delle caratteristiche principali dei sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità era che le orbite nell'insieme stabile convergevano all'origine tangenti a una direzione. Vogliamo prima di tutto vedere se qualcosa del genere può avvenire anche in più variabili.

Indichiamo con $v \mapsto [v]$ la proiezione canonica di $\mathbb{C}^n \setminus \{O\}$ su $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, e sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$. Diremo che un'orbita $\{f^k(z_0)\}$ converge all'origine *tangente a* una direzione $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ se $f^k(z_0) \neq O$ per ogni $k \geq 0$, $f^k(z_0) \to O$ in $\mathbb{C}^n$, e $[f^k(z_0)] \to [v]$ in $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Esaminando accuratamente le conseguenze di questa condizione, non è difficile dimostrare la seguente

Proposizione 6.1: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale tangente all'identità, scritto nella forma* (6.1). *Se f ha un'orbita convergente all'origine tangente alla direzione $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, allora $P_\nu(v) = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Se $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ è tangente all'identità e di ordine ν, una *direzione caratteristica* per f è una $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ tale che $P_\nu(v) = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Siccome v è determinato a meno di un multiplo non nullo, e P_ν è omogeneo, l'effettivo valore di λ non è significativo; l'unica cosa che conta è se è nullo o non lo è. Se $P_\nu(v) = O$ (cioè se $\lambda = 0$) diremo che $[v]$ è una direzione caratteristica *degenere;* altrimenti, (cioè se $\lambda \neq 0$), diremo che $[v]$ è una direzione caratteristica *non degenere.*

Osservazione 6.1: La n-upla di polinomi ν-omogenei P_ν induce un'applicazione meromorfa di $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ in sé, che indicheremo ancora con P_ν. Allora le direzioni caratteristiche non degeneri sono esattamente i punti fissi di P_ν, mentre le direzioni caratteristiche degeneri sono i punti d'indeterminazione di P_ν. Tra l'altro, usando il teorema di Bezout è facile dimostrare (si veda, per esempio, [AT1]) che il numero totale delle direzioni caratteristiche, contate con molteplicità appropriata, è $(\nu^n - 1)/(\nu - 1)$.

Osservazione 6.2: Le direzioni caratteristiche sono direzioni *complesse;* in particolare, è facile verificare che f e f^{-1} hanno le stesse direzioni caratteristiche. Fra poco vedremo che è possibile associare a (quasi) tutte le direzioni caratteristiche dei petali, centrati in un certo senso su una direzione attrattiva *reale,* come accadeva per i petali unidimensionali.

Osservazione 6.3: Esistono (sfortunatamente?) dei sistemi dinamici olomorfi locali tangenti all'identità con orbite convergenti all'origine e non tangenti ad alcuna direzione: per esempio,

$$f(z, w) = \bigl(z + \alpha z w, h(w)\bigr)$$

con $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $h \in \mathrm{End}(\mathbb{C}, 0)$ tali che $h'(0) = 1$, $h''(0) \neq 0$, α e $\mathrm{Re}\bigl(\alpha/h''(0)\bigr) = 1$ (see [Ri1]).

Se vogliamo generalizzare il teorema del fiore di Leau-Fatou ci serve un analogo multidimensionale dei petali: le curve paraboliche. Una *curva parabolica* per $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ tangente all'identità è un'applicazione olomorfa iniettiva $\varphi\colon \Delta \to \mathbb{C}^n \setminus \{O\}$ con le seguenti proprietà:

(a) Δ è un dominio semplicemente connesso in $\mathbb{C}$ con $0 \in \partial\Delta$;
(b) φ è continua nell'origine, e $\varphi(0) = O$;
(c) $\varphi(\Delta)$ è f-invariante, e $(f|_{\varphi(\Delta)})^k \to O$ uniformemente sui compatti per $k \to +\infty$.

Inoltre, se $[\varphi(\zeta)] \to [v]$ in $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ per $\zeta \to 0$ in Δ, diremo che la curva parabolica φ è *tangente* alla direzione $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Possiamo ora enunciare la prima generalizzazione importante del teorema del fiore di Leau-Fatou a più variabili complesse:

Teorema 6.2: (Écalle, 1985 [É3]; Hakim, 1998 [Ha2]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale tangente all'identità di ordine $\nu \geq 2$. Allora per ogni direzione caratteristica non degenere $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ esistono (almeno) $\nu - 1$ curve paraboliche per f tangenti a $[v]$.*

La dimostrazione di Ècalle è basata sulla sua teoria della risorgenza delle serie divergenti. Invece, la dimostrazione di Hakim costruisce curve paraboliche della forma $\varphi(\zeta) = \big(\zeta, u(\zeta)\big)$ con dominio una componente connessa dell'insieme $D_{\delta,\nu} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta^{\nu-1} - \delta| < \delta\}$ per $\delta > 0$ abbastanza piccolo ($D_{\delta,\nu}$ ha esattamente $\nu - 1$ componenti connesse, ognuna centrata attorno a una direzione reale, le cui immagini tramite φ diventano le direzioni attrattive reali associate alla data direzione caratteristica non degenere), dove u è ottenuta come punto fisso di un'opportuna contrazione definita su un convesso chiuso di un opportuno spazio di Banach. Si veda anche [W]. Un insieme di $\nu - 1$ curve paraboliche ottenuto in questo modo sarà detto *fiore di Fatou* per f tangente a $[v]$.

Osservazione 6.4: Quando esiste una sottovarietà complessa 1-dimensionale f-invariante per l'origine tangente a una direzione (necessariamente) caratteristica, il teorema precedente diventa un'ovvia conseguenza della teoria unidimensionale. Ma nella maggior parte dei casi una tale sottovarietà f-invariante non esiste: si veda [Ha2] per un esempio concreto, e [É3] per una discussione generale del problema.

Possono esistere anche delle sottovarietà complesse (con l'origine sul bordo) f-invarianti di dimensione strettamente maggiore di 1 attratte dall'origine. Dato un sistema dinamico olomorfo locale $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ tangente all'identità di ordine $\nu \geq 2$, e una direzione caratteristica non degenere $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, gli autovalori $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ dell'operatore lineare $d(P_\nu)_{[v]} - \mathrm{id}\colon T_{[v]}\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \to T_{[v]}\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ (si veda l'Osservazione 6.1) sono detti *direttori* di $[v]$. Usando una versione più elaborata della sua dimostrazione del Teorema 6.2, Hakim ha ottenuto il seguente:

Teorema 6.3: (Hakim, 1997 [Ha3]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale tangente all'identità di ordine $\nu \geq 2$. Sia $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ una direzione caratteristica non degenere, di direttori $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$, ordinati in modo che $\mathrm{Re}\,\alpha_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\alpha_d > 0$ e $\mathrm{Re}\,\alpha_{d+1}, \ldots, \mathrm{Re}\,\alpha_{n-1} \leq 0$ per un opportuno $d \geq 0$. Allora:*

(i) *Esiste una sottovarietà complessa M di dimensione $d+1$ e f-invariante, con l'origine sul bordo, tale che l'orbita di ogni punto di M converge all'origine tangente a $[v]$;*
(ii) *$f|_M$ è olomorficamente coniugata alla traslazione $\tau(w_0, w_1, \ldots, w_d) = (w_0 + 1, w_1, \ldots, w_d)$ definita su un opportuno semispazio destro di $\mathbb{C}^{d+1}$.*

Osservazione 6.5: In particolare, se tutti i direttori di $[v]$ hanno parte reale positiva, allora esiste un aperto attratto dall'origine. Questo può accadere anche se non tutti i direttori di $[v]$ hanno parte reale positiva; si veda Rivi [Ri1] per un esempio semplice, e Ushiki [Us] per un esempio più elaborato di un aperto attratto dall'origine dove f non può essere olomorficamente coniugata a una traslazione.

Nella sua opera monumentale [É3], Écalle ha costruito un sistema completo di invarianti formali per sistemi dinamici olomorfi locali tangenti all'identità con almeno una direzione caratteristica non degenere. Per esempio, ha dimostrato il seguente

Teorema 6.4: (Écalle, 1985 [É3]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale tangente all'identità di ordine $\nu \geq 2$. Supponiamo che*

(a) *f abbia esattamente $(\nu^n - 1)/(\nu - 1)$ direzioni caratteristiche non degeneri distinte, e nessuna direzione caratteristica degenere;*
(b) *i direttori di ciascuna direzione caratteristica non degenere siano irrazionali e linearmente indipendenti su $\mathbb{Z}$.*

Scegliamo una direzione caratteristica non degenere $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ i suoi direttori. Allora esiste un unico $\rho \in \mathbb{C}$ e uniche (a meno di dilatazioni) serie formali $R_1, \ldots, R_n \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$, dove ciascuna R_j contiene soltanto monomi di grado totale almeno $\nu + 1$ e di grado in z_j almeno $\nu - 2$, tali che f sia formalmente coniugata al flusso al tempo 1 del campo vettoriale formale

$$X = \frac{1}{(\nu - 1)(1 + \rho z_n^{\nu-1})} \left\{ [-z_n^\nu + R_n(z)] \frac{\partial}{\partial z_n} + \sum_{j=1}^{n-1} [-\alpha_j z_n^{\nu-1} z_j + R_j(z)] \frac{\partial}{\partial z_j} \right\} .$$

Altri approcci alla classificazione formale, almeno in dimensione 2, sono descritti in [BM] e in [AT2].

Usando la sua teoria della risorgenza, e sempre assumendo l'esistenza di almeno una direzione caratteristica non degenere, Écalle ha anche costruito un insieme di invarianti olomorfi per i sistemi dinamici olomorfi locali tangenti all'identità, invarianti descritti tramite operatori differenziali a coefficienti serie formali. Se i direttori di tutte le direzioni caratteristiche non degeneri sono irrazionali e soddisfano una condizione diofantea, questo insieme di invarianti è completo. Si veda [É4] per una descrizione di questi risultati, e [É3] per i dettagli.

A questo punto una domanda sorge spontanea: che succede se non ci sono direzioni caratteristiche non degeneri? Un esempio di questa situazione è la $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ data da

$$\begin{cases} f_1(z) = z_1 + bz_1z_2 + z_2^2 \;, \\ f_2(z) = z_2 - b^2z_1z_2 - bz_2^2 + z_1^3 \;, \end{cases}$$

per qualsiasi $b \in \mathbb{C}^*$, ed è facile costruire esempi analoghi di ordine qualsiasi. Attualmente la teoria in questo caso è a uno stadio soddisfacente solo per $n = 2$. In particolare, in [A2] è dimostrato il seguente

Teorema 6.5: (Abate, 2001 [A2]) *Ogni sistema dinamico olomorfo locale $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ tangente all'identità, con un punto fisso isolato, ha almeno un fiore di Fatou tangente a una qualche direzione caratteristica.*

Osservazione 6.6: Bracci e Suwa hanno dimostrato una versione del Teorema 6.5 per $f \in \mathrm{End}(M, p)$, dove M è uno spazio analitico complesso *singolare* (ma non troppo) in p; si veda [BrS] per i dettagli.

Nel resto di questa sezione descriveremo le linee principali della dimostrazione del Teorema 6.5, in quanto forniscono un'idea abbastanza generale di come studiare la dinamica di sistemi dinamici olomorfi locali tangenti all'identità.

Il primo strumento necessario è il concetto di *blow-up,* preso in prestito dalla geometria algebrica. Se p è un punto in una varietà complessa M, esiste un modo canonico per costruire una varietà complessa $\tilde{M}$, detta *blow-up* di M in p, equipaggiata con una proiezione olomorfa $\pi\colon \tilde{M} \to M$, tale che $E = \pi^{-1}(p)$, il *divisore eccezionale* del blow-up, sia canonicamente biolomorfo a $\mathbb{P}(T_pM)$, e $\pi|_{\tilde{M}\setminus E}\colon \tilde{M} \setminus E \to M \setminus \{p\}$ sia un biolomorfismo. In coordinate locali opportune, l'applicazione π è data da

$$\pi(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (w_1, w_1w_2, \ldots, w_1w_n) \;. \tag{6.2}$$

Inoltre, se $f \in \mathrm{End}(M, p)$ è tangente all'identità, esiste un unico sollevamento $\tilde{f} \in \mathrm{End}(\tilde{M}, E)$ tale che $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$, dove $\mathrm{End}(\tilde{M}, E)$ è l'insieme dei (germi di) applicazioni olomorfe definite in un intorno di E a valori in $\tilde{M}$ e che siano l'identità su E. In particolare, le direzioni caratteristiche di f diventano punti nel dominio di $\tilde{f}$.

Usando il blow-up dell'origine possiamo stabilire quali direzioni caratteristiche sono dinamicamente significative. Sia $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ tangente all'identità; posto $\ell = \mathrm{MCD}(f_1 - z_1, f_2 - z_2)$, possiamo scrivere

$$f_j(z) = z_j + \ell(z)g_j(z)$$

per $j = 1$, 2, con g_1 e g_2 relativamente primi in $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$. Diremo che O è un *punto singolare* di f se $g_1(O) = g_2(O) = 0$. Chiaramente, se O è un punto fisso isolato di f allora è singolare; ma se non è isolato (cioè $\ell \not\equiv 1$) potrebbe non essere singolare. Soltanto i punti fissi singolari sono dinamicamente significativi, perché un conto non difficile (si veda [A2], e [AT1] per una generalizzazione a dimensione n) permette di dimostrare la seguente

Proposizione 6.6: *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale tangente all'identità. Se il punto fisso O non è singolare, allora K_f coincide con l'isieme dei punti fissi di f.*

Ora, se $\tilde{M}$ è il blow-up di $\mathbb{C}^2$ nell'origine, allora il sollevamento $\tilde{f}$ di f appartiene a $\mathrm{End}(\tilde{M}, [v])$ per ogni direzione $[v] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = E$. Diremo che $[v] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è una *direzione singolare* di f se è un punto singolare di $\tilde{f}$. Non è difficile dimostrare che le direzioni caratteristiche non degeneri sono sempre singolari (ma il viceversa è falso), e che le direzioni singolari sono sempre caratteristiche (ma il viceversa è falso). In altre parole, le direzioni singolari sono esattamente le direzioni caratteristiche dinamicamente significative.

Il motivo per cui il blow-up è utile in questo contesto è che, benché la varietà soggiacente si complichi, l'applicazione sollevata si semplifica. Infatti, usando un argomento simile a quello utilizzato nello studio delle foliazioni olomorfe singolari di 2-varietà complesse (si veda, per esempio, [MM]), in [A2] si simostra che tramite un numero finito di blow-up ogni sistema dinamico olomorfo locale tangente all'identità $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ può essere sollevato a una $\tilde{f}$ i cui punti singolari (sono in numero finito e) soddisfano una delle condizioni seguenti:

(o) sono *dicritici,* cioè hanno un numero infinito di direzioni singolari; o,
($\star$) in opportune coordinate locali centrate nel punto singolare possiamo scrivere

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(z) = z_1 + \ell(z)\big(\lambda_1 z_1 + O(\|z\|^2)\big) , \\ \tilde{f}_2(z) = z_2 + \ell(z)\big(\lambda_2 z_2 + O(\|z\|^2)\big) , \end{cases}$$

con
($\star_1$) λ_1, $\lambda_2 \neq 0$ e λ_1/λ_2, $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$, oppure
($\star_2$) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

Osservazione 6.7: Questa "riduzione delle singolarità" funziona solo in dimensione 2, e non è chiaro cosa possa sostituirla in dimensione più alta.

Non è difficile verificare che il Teorema 6.2 può essere applicato sia alle singolarità dicritiche sia alle singolarità di tipo ($\star_1$); quindi non appena questa successione di blow-up produce una singolarità dicritica o una singolarità di tipo ($\star_1$) otteniamo (per proiezione) un fiore di Fatou per il sistema dinamico f di partenza. Quindi per concludere la dimostrazione del Teorema 6.5 è sufficiente mostrare che ogni successione di blow-up di questo genere *deve* produrre almeno una singolarità dicritica o di tipo ($\star_1$). Per farlo, ci serve un ingrediente completamente nuovo.

Supponiamo che O sia un punto fisso isolato di una $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ tangente all'identità, e supponiamo che O non sia una singolarità dicritica. Allora il sollevato $\tilde{f} \in \mathrm{End}(\tilde{M}, E)$ è l'identità sul divisore eccezionale E, e su di esso ha un numero finito di punti singolari. Inoltre, se scegliamo coordinate locali (z_1, z_2) su $\tilde{M}$ centrate in un punto di E in modo che E sia dato da $\{z_1 = 0\}$, esistono $\mu_1 > \mu_2$ tali che possiamo scrivere

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(z) = z_1 + z_1^{\mu_1} g_1(z) , \\ \tilde{f}_2(z) = z_2 + z_1^{\mu_2} g_2(z) , \end{cases}$$

dove z_1 non divide né g_1 né g_2; diremo che $\tilde{f}$ è *tangenziale* a E.

Allora in maniera analoga a quanto fatto da Camacho e Sad [CS] nel loro studio delle separatrici per foliazioni olomorfe singolari in dimensione 2, è possibile associare a ciscun punto $p \in E$ singolare per $\tilde{f}$ un *indice* $\iota_p(\tilde{f}, E) \in \mathbb{C}$ dipendente solo dal comportamento di $\tilde{f}$ in un intorno di p, in modo che valga il seguente *Teorema dell'indice:*

Teorema 6.7: (Abate, 2001 [A2]) *Sia E una superficie di Riemann compatta contenuta in una varietà complessa M di dimensione 2. Sia $\tilde{f} \in \mathrm{End}(M, E)$ tangenziale a E. Allora*

$$\sum_{p \in E} \iota_p(\tilde{f}, E) = \int_E c_1(N_E) ,$$

dove $c_1(N_E)$ è la prima classe di Chern del fibrato normale N_E di E in M, e abbiamo posto $\iota_p(\tilde{f}, E) = 0$ se p è un punto non singolare di $\tilde{f}$.

Osservazione 6.8: Se $\tilde{f}$ è il sollevamento di un'applicazione tangente all'identità, e $[v] \in E$ è una direzione caratteristica non degenere con direttore α non nullo, allora $\iota_{[v]}(f, E) = 1/\alpha$.

Osservazione 6.9: Il Teorema 6.7 è un caso particolare di un teorema dell'indice molto più generale, valido per applicazioni olomorfe di una varietà complessa qualsiasi in sé che sia l'identità su una sottovarietà di codimensione qualsiasi, o su una ipersuperficie anche singolare; si veda [BrT], [Br] e [ABT], dove sono discusse anche alcune applicazioni alla dinamica. In particolare, in [ABT] è introdotta una sezione canonica di un opportuno fibrato vettoriale che descrive la dinamica locale in un intorno infinitesimo della sottovarietà, e che permette di dare una definizione intrinseca sia del concetto di tangenzialità di un'applicazione che del concetto di indice. Infine, in [ABT2] è descritta una procedura generale per ottenere teoremi dell'indice di questo genere per applicazioni e per foliazioni olomorfe.

Siamo quasi in fondo. Un argomento combinatorio (nuovamente ispirato da Camacho e Sad [CS]) mostra che se $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ ha un punto fisso isolato tale che la risoluzione delle singolarità tramite blow-up produca solo singolarità di tipo $(\star_2)$, allora l'indice del sollevamento $\tilde{f}$ in ciascuna direzione singolare dev'essere un numero razionale non negativo. Ma l'integrale della prima classe di Chern di N_E è uguale a -1, che non può essere somma di numeri razionali non negativi... e questa contraddizione completa la dimostrazione del Teorema 6.5.

Osservazione 6.10: In realtà, abbiamo dimostrato un risultato più preciso. Infatti, un argomento analogo (lungo le linee di [Ca]) può essere usato per ottenere l'enunciato seguente: *sia E una superficie di Riemann (non necessariamente compatta) contenuta in una varietà complessa M di dimensione 2, e sia $f \in \mathrm{End}(M, E)$ tangenziale a E. Sia $p \in E$ un punto singolare di f tale che $\iota_p(f, E) \notin \mathbb{Q}^+$. Allora esiste un fiore di Fatou per f in p.* Questo risultato è stato recentemente generalizzato in due modi. Degli Innocenti [DI] ha dimostrato che l'enunciato è ancora vero se E ha una singolarità irriducibile in p. Molino [Mo], d'altro canto, ha dimostrato che l'asserto è ancora vero supponendo $\iota_p(f, E) \neq 0$, con f di ordine 2 (e E regolare in p).

Osservazione 6.11: Non è noto se il Teorema 6.5 valga in dimensione maggiore di 2; si veda [AT1] per qualche risultato parziale.

Più o meno questo è quanto a tutt'oggi è noto sui sistemi dinamici olomorfi locali tangenti all'identità in dimensione 2 o maggiore. In particolare, è tutt'ora aperto, anche in dimensione 2, sia il problema della caratterizzazione completa dell'insieme stabile sia quello della classificazione topologica. Alcuni risultati nel caso di punti singolari dicritici si trovano in [BM].

Concludiamo questa sezione con qualche parole sui sistemi dinamici olomorfi locali con un punto fisso parabolico in cui il differenziale non sia diagonalizzabile. Esempi concreti sono studiati in dettaglio in [CD], [A4] and [GS]. Invece, in [A1] è descritta una procedura canonica (tramite una successione finita di blow-up non solo di punti ma anche di sottovarietà) per sollevare qualsiasi $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ il cui differenziale nell'origine non sia diagonalizzabile a un'applicazione con un punto fisso canonico in cui il differenziale sia diagonalizzabile. Usando questa procedura è possibile per esempio ottenere il seguente

Corollario 6.8: (Abate, 2001 [A2]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale con un punto fisso isolato nell'origine, e supponiamo che df_O sia la matrice di Jordan canonica associata all'autovalore 1. Allora f ha almeno un fiore di Fatou tangente a $[1:0]$ nell'origine.*

7. Più variabili complesse: altri casi

La teoria nei casi non iperbolici o parabolici non è molto sviluppata. Le Proposizioni 5.3 e 5.4, e i Teoremi 5.7 e 5.8 si applicano anche al caso ellittico. Un altro risultato nello stesso spirito è:

Teorema 7.1: (Yoccoz, 1995 [Y2]) *Sia $A \in GL(n, \mathbb{C})$ una matrice invertibile la cui forma canonica di Jordan contenga un blocco non banale associato a un autovalore di modulo 1, e supponiamo che gli autovalori di A non abbiano risonanze. Allora esiste $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ con $df_O = A$ non olomorficamente linearizzabile.*

Un caso che ha ricevuto particolare attenzione è il caso semiattrattivo, studiato in dettaglio da Fatou [F4], Nishimura [N], Ueda [U1, 2], Hakim [H1] e Rivi [Ri1, 2]. I loro risultati essenzialmente dicono che l'autovalore 1 produce una "varietà parabolica" M — nel senso del Teorema 6.3.(ii) —, mentre gli autovalori di modulo minore di uno assicurano che le orbite dei punti contenuti in un opportuno intorno tubolare di M convergano verso M. Per esempio, Rivi ha dimostrato il seguente

Teorema 7.2: (Rivi, 2001 [Ri1, 2]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale. Supponiamo che 1 sia un autovalore di df_O molteplicità (algebrica e geometrica) $q \geq 1$, e che gli altri autovalori di df_O abbiano modulo minore di 1. Allora possiamo scegliere coordinate locali $(z, w) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^{n-q}$ tali che $f_1(z, 0)$ sia tangente all'identità di ordine $\nu \geq 2$; inoltre, se $v \in \mathbb{C}^q \subset \mathbb{C}^n$ è una direzione caratteristica non degenere per $f_1(z, 0)$ allora esistono $\nu - 1$ sottovarietà complesse M_j disgiunte di dimensione $n - q + 1$ ed f-invarianti,* *con l'origine sul bordo, tali che l'orbita di ogni punto di M_j converga all'origine tangente a $\mathbb{C}v \oplus E$, dove $E \subset \mathbb{C}^n$ è il sottospazio generato dagli autospazi generalizzati di df_O associati agli autovalori con modulo minore di* 1.

Rivi ha anche risultati nello spirito del Teorema 6.3, e risultati nel caso in cui le molteplicità algebriche e geometriche dell'autovalore 1 siano diverse; si veda [Ri1, 2] per i dettagli.

Ch'io sappia, quasi nulla è noto sulla classificazione formale od olomorfa dei sistemi dinamici olomorfi locali con un punto fisso semiattrattivo. Invece, partendo dal lavoro fatto da Canille Martins [CM] in dimensione 2, e usando il Teorema 3.3 e risultati generali sui sistemi dinamici normalmente iperbolici dovuti a Palis and Takens [PT], Di Giuseppe ha ottenuto la classificazione topologica nel caso in cui l'autovalore 1 abbia molteplicità 1 e gli altri autovalori non abbiano risonanze:

Teorema 7.3: (Di Giuseppe, 2006 [Di]) *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico olomorfo locale tale che df_O abbia autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, dove λ_1 è una radice q-esima primitiva dell'unità, e $|\lambda_j| \neq 0, 1$ per $j = 2, \ldots, n$. Supponiamo inoltre che $\lambda_2^{r_2} \cdots \lambda_n^{r^n} \neq 1$ per tutti i multi-indici $(r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$ tali che $r_2 + \cdots + r_n \geq 2$. Allora o f è topologicamente localmente coniugato a df_O oppure è topologicamente localmente coniugato a*

$$z \mapsto (\lambda_1 z_1 + z_1^{kq+1}, \lambda_2 z_2, \ldots, \lambda_n z_n)$$

per un opportuno $k \in \mathbb{N}^*$.

Concludiamo questo articolo ricordando due ultimi risultati su un caso a metà fra l'ellittico e il parabolico. Supponiamo che $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2, O)$ sia un sistema dinamico olomorfo locale tale che gli autovalori di df_O siano 1 ed $e^{2\pi i\theta} \neq 1$. Se $e^{2\pi i\theta}$ soddisfa la condizione di Bryuno (4.7), Pöschel [Pö] ha dimostrato l'esistenza di un disco unidimensionale f invariante contenente l'origine dove f è coniugata a una rotazione irrazionale di angolo θ. Invece, Bracci e Molino [BrM] hanno trovato condizioni sufficienti (dipendenti da f ma non da θ, espresse in termini di due nuovi invarianti olomorfi, e soddisfatte da applicazioni generiche) per l'esistenza di curve paraboliche tangenti all'autospazio relativo all'autovalore 1.

References

[A1] M. Abate: *Diagonalization of non-diagonalizable discrete holomorphic dynamical systems.* Amer. J. Math. **122** (2000), 757–781.

[A2] M. Abate: *The residual index and the dynamics of holomorphic maps tangent to the identity*. Duke Math. J. **107** (2001), 173–207.

[A3] M. Abate: **An introduction to hyperbolic dynamical systems.** I.E.P.I. Pisa, 2001.

[A4] M. Abate: *Basins of attraction in quadratic dynamical systems with a Jordan fixed point.* Nonlinear Anal. **51** (2002), 271–282.

[AT1] M. Abate, F. Tovena: *Parabolic curves in $\mathbb{C}^3$.* Abstr. Appl. Anal. **2003** (2003), 275–294.

[AT2] M. Abate, F. Tovena: *Formal classification of holomorphic maps tangent to the identity*. Disc. Cont. Dyn. Sys. **Suppl.** (2005), 1–10.

[ABT] M. Abate, F. Bracci, F. Tovena: *Index theorems for holomorphic self-maps.* Ann. of Math. **159** (2004), 819–864.

[ABT2] M. Abate, F. Bracci, F. Tovena: *Index theorems for holomorphic maps and foliations.* Preprint, arXiv: math.CV/0601602, 2006.

[Ar] V.I. Arnold: **Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.** Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[B] L.E. Böttcher: *The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis.* Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. **14** (1904), 155–234.

[Br] F. Bracci: *The dynamics of holomorphic maps near curves of fixed points.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **2** (2003), 493–520.

[BrM] F. Bracci, L. Molino: *The dynamics near quasi-parabolic fixed points of holomorphic diffeomorphisms in $\mathbb{C}^2$.* Amer. J. Math. **126** (2004), 671–686.

[BrS] F. Bracci, T. Suwa: *Residues for singular pairs and dynamics of biholomorphic maps of singular surfaces*. Internat. J. Math. **15** (2004), 443–466.

[BrT] F. Bracci, F. Tovena: *Residual indices of holomorphic maps relative to singular curves of fixed points on surfaces*. Math. Z. **242** (2002), 481–490.

[BM] F.E. Brochero Martínez: *Groups of germs of analytic diffeomorphisms in* $(\mathbb{C}^2, O)$. J. Dynamic. Control Systems **9** (2003), 1–32.

[Bry1] A.D. Bryuno: *Convergence of transformations of differential equations to normal forms*. Dokl. Akad. Nauk. USSR **165** (1965), 987–989.

[Bry2] A.D. Bryuno: *Analytical form of differential equations, I*. Trans. Moscow Math. Soc. **25** (1971), 131–288.

[Bry3] A.D. Bryuno: *Analytical form of differential equations, II*. Trans. Moscow Math. Soc. **26** (1972), 199–239.

[C] C. Camacho: *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields*. Astérisque **59–60** (1978), 83–94.

[CS] C. Camacho, P. Sad: *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Ann. of Math. **115** (1982), 579–595.

[CM] J.C. Canille Martins: *Holomorphic flows in* $(\mathbb{C}^3, O)$ *with resonances*. Trans. Am. Math. Soc. **329** (1992), 825–837.

[Ca] J. Cano: *Construction of invariant curves for singular holomorphic vector fields*. Proc. Am. Math. Soc. **125** (1997), 2649–2650.

[CG] S. Carleson, F. Gamelin: **Complex dynamics.** Springer, Berlin, 1994.

[Ch] M. Chaperon: **Géométrie différentielle et singularités des systèmes dynamiques.** Astérisque **138–139,** 1986.

[CD] D. Coman, M. Dabija: *On the dynamics of some diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *near parabolic fixed points*. Houston J. Math. **24** (1998), 85–96.

[Cr1] H. Cremer: *Zum Zentrumproblem*. Math. An.. **98** (1927), 151–163.

[Cr2] H. Cremer: *Über die Häufigkeit der Nichtzentren*. Math. Ann. **115** (1938), 573–580.

[CR] J. Cresson, J. Raissy: *About the trimmed and the Poincaré-Dulac normal form of diffeomorphisms*. Preprint, arXiv: math.DS/0605716, 2006.

[DI] F. Degli Innocenti: *Holomorphic dynamics near germs of singular curves*. Math. Z. **251** (2005), 943–958.

[DG] D. DeLatte, T. Gramchev: *Biholomorphic maps with linear parts having Jordan blocks: linearization and resonance type phenomena*. Math. Phys. El. J. **8** (2002), 1–27.

[Di] P. Di Giuseppe: *Topological classification of holomorphic, semi-hyperbolic germs in quasi-absence of resonances*. Math. Ann. **334** (2006), 609–625.

[É1] J. Écalle: **Les fonctions résurgentes. Tome I: Les algèbres de fonctions résurgentes.** Publ. Math. Orsay **81-05,** Université de Paris-Sud, Orsay, 1981.

[É2] J. Écalle: **Les fonctions résurgentes. Tome II: Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération.** Publ. Math. Orsay **81-06,** Université de Paris-Sud, Orsay, 1981.

[É3] J. Écalle: **Les fonctions résurgentes. Tome III: L'équation du pont et la classification analytique des objects locaux.** Publ. Math. Orsay **85-05,** Université de Paris-Sud, Orsay, 1985.

[É4] J. Écalle: *Iteration and analytic classification of local diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^\nu$. In **Iteration theory and its functional equations,** Lect. Notes in Math. **1163,** Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 41–48.

[ÉS] J. Écalle, D. Schlomiuk: *The nilpotent and distinguished form of resonant vector fields or diffeomorphisms*. Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1407–1483.

[ÉV] J. Écalle, B. Vallet: *Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms*. Math. Z. **229** (1998), 249–318.

[F1] P. Fatou: *Sur les équations fonctionnelles, I*. Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161–271.

[F2] P. Fatou: *Sur les équations fonctionnelles, II*. Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 33–94.

[F3] P. Fatou: *Sur les équations fonctionnelles, III*. Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 208–314.

[F4] P. Fatou: *Substitutions analytiques et équations fonctionnelles à deux variables*. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **40** (1924), 67–142.

[FJ] C. Favre, M. Jonsson: **The valuative tree.** Lect. Notes in Math. 1853, Springer Verlag, Berlin, 2004.

[FHY] A. Fathi, M. Herman, J.-C. Yoccoz: *A proof of Pesin's stable manifold theorem*. In **Geometric Dynamics,** Lect Notes in Math. 1007, Springer Verlag, Berlin, 1983, pp. 177–216.

[GS] V. Gelfreich, D. Sauzin: *Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map*. Ann. Inst. Fourier Grenoble **51** (2001), 513–567.

[G1] D.M. Grobman: *Homeomorphism of systems of differential equations*. Dokl. Akad. Nauk. USSR **128** (1959), 880–881.

[G2] D.M. Grobman: *Topological classification of neighbourhoods of a singularity in n-space*. Math. Sbornik **56** (1962), 77–94.

[H] J.S. Hadamard: *Sur l'itération et les solutions asymptotyques des équations différentielles*. Bull. Soc. Math. France **29** (1901), 224–228.

[Ha1] M. Hakim: *Attracting domains for semi-attractive transformations of $\mathbb{C}^p$*. Publ. Matem. **38** (1994), 479–499.

[Ha2] M. Hakim: *Analytic transformations of $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangent to the identity*. Duke Math. J. **92** (1998), 403–428.

[Ha3] M. Hakim: *Transformations tangent to the identity. Stable pieces of manifolds*. Preprint, 1997.

[Har] P. Hartman: *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*. Proc. Am. Math. Soc. **11** (1960), 610–620.

[HK] B. Hasselblatt, A. Katok: **Introduction to the modern theory of dynamical systems.** Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[He] M. Herman: *Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of $\mathbb{C}^n$ near a fixed point*. In **Proc.** 8^{th} **Int. Cong. Math. Phys.,** World Scientific, Singapore, 1986, pp. 138–198.

[HPS] M. Hirsch, C.C. Pugh, M. Shub: **Invariant manifolds.** Lect. Notes Math. **583,** Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[HP] J.H. Hubbard, P. Papadopol: *Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$*. Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 321–365.

[I1] Yu.S. Il'yashenko: *Divergence of series reducing an analytic differential equation to linear normal form at a singular point*. Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 227–229.

[I2] Yu.S. Il'yashenko: *Nonlinear Stokes phenomena*. In **Nonlinear Stokes phenomena,** Adv. in Soviet Math. **14,** Am. Math. Soc., Providence, 1993, pp. 1–55.

[K] T. Kimura: *On the iteration of analytic functions*. Funk. Eqvacioj **14** (1971), 197–238.

[Kœ] G. Kœnigs: *Recherches sur les integrals de certain equations fonctionelles*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **1** (1884), 1–41.

[L] L. Leau: *Étude sur les equations fonctionelles à une ou plusieurs variables*. Ann. Fac. Sci. Toulouse **11** (1897), E1–E110.

[M1] B. Malgrange: *Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*. Astérisque **92-93** (1981/82), 59–73.

[M2] B. Malgrange: *Introduction aux travaux de J. Écalle*. Ens. Math. **31** (1985), 261–282.

[Ma] S. Marmi: **An introduction to small divisors problems.** I.E.P.I., Pisa, 2000.

[MM] J.F. Mattei, R. Moussu: *Holonomie et intégrales premières*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **13** (1980), 469–523.

[Mi] J. Milnor: **Dynamics in one complex variable.** Vieweg, Braunschweig, 2000.

[Mo] L. Molino: *The dynamics of maps tangent to the identity and with non-vanishing index*. To appear in Trans. Amer. Math. Soc., 2006.

[N] Y. Nishimura: *Automorphismes analytiques admettant des sousvariétés de point fixes attractives dans la direction transversale*. J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 289–299.

[PT] J. Palis, F. Takens: *Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems*. Topology **16** (1977), 335–345.

[P1] R. Pérez-Marco: *Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V.I. Arnold*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **26** (1993), 565–644.

[P2] R. Pérez-Marco: *Topology of Julia sets and hedgehogs*. Preprint, Université de Paris-Sud, 94-48, 1994.

[P3] R. Pérez-Marco: *Non-linearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries*. Invent. Math. **199** (1995), 67–127.

[P4] R. Pérez-Marco: *Holomorphic germs of quadratic type*. Preprint, 1995.

[P5] R. Pérez-Marco: *Hedgehogs dynamics*. Preprint, 1995.

[P6] R. Pérez-Marco: *Sur une question de Dulac et Fatou*. C.R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 1045–1048.

[P7] R. Pérez-Marco: *Fixed points and circle maps*. Acta Math. **179** (1997), 243–294.

[P8] R. Pérez-Marco: *Linearization of holomorphic germs with resonant linear part*. Preprint, arXiv: math.DS/0009030, 2000.

[P9] R. Pérez-Marco: *Total convergence or general divergence in small divisors*. Comm. Math. Phys. **223** (2001), 451–464.

[Pe] O. Perron: *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen*. Math. Z. **29** (1928), 129–160.

[Pes] Ja.B. Pesin: *Families of invariant manifolds corresponding to non-zero characteristic exponents*. Math. USSR Izv. **10** (1976), 1261–1305.

[Po] H. Poincaré: **Œuvres, Tome I.** Gauthier-Villars, Paris, 1928, pp. XXXVI–CXXIX.

[Pö] J. Pöschel: *On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points*. Exp. Math. **4** (1986), 97–109.

[R1] L. Reich: *Das Typenproblem bei formal-biholomorphien Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt*. Math. Ann. **179** (1969), 227–250.

[R2] L. Reich: *Normalformen biholomorpher Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt*. Math. Ann. **180** (1969), 233–255.

[Ri1] M. Rivi: **Local behaviour of discrete dynamical systems.** Ph.D. Thesis, Università di Firenze, 1999.

[Ri2] M. Rivi: *Parabolic manifolds for semi-attractive holomorphic germs*. Mich. Math. J. **49** (2001), 211–241.

[S] A.A. Shcherbakov: *Topological classification of germs of conformal mappings with identity linear part*. Moscow Univ. Math. Bull. **37** (1982), 60–65.

[Sh] M. Shub: **Global stability of dynamical systems.** Springer, Berlin, 1987.

[Si] C.L. Siegel: *Iteration of analytic functions*. Ann. of Math. **43** (1942), 607–612.

[St1] S. Sternberg: *Local contractions and a theorem of Poincaré*. Amer. J. Math. **79** (1957), 809–824.

[St2] S. Sternberg: *The structure of local homomorphisms, II*. Amer. J. Math. **80** (1958), 623–631.

[U1] T. Ueda: *Local structure of analytic transformations of two complex variables, I*. J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 233–261.

[U2] T. Ueda: *Local structure of analytic transformations of two complex variables, II*. J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 695–711.

[Us] S. Ushiki: *Parabolic fixed points of two-dimensional complex dynamical systems*. Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **959** (1996), 168–180.

[V] S.M. Voronin: *Analytic classification of germs of conformal maps* $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *with identity linear part*. Func. Anal. Appl. **15** (1981), 1–17.

[Y1] J.-C. Yoccoz: *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de* $(\mathbb{C}, 0)$. C.R. Acad. Sci. Paris **306** (1988), 55–58.

[Y2] J.-C. Yoccoz: *Théorème de Siegel, nombres de Bryuno et polynômes quadratiques*. Astérisque **231** (1995), 3–88.

[W] B.J. Weickert: *Attracting basins for automorphisms of* $\mathbb{C}^2$. Invent. Math. **132** (1998), 581–605.

[Wu] H. Wu: *Complex stable manifolds of holomorphic diffeomorphisms*. Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 1349–1358.