SELEZIONE DI ESERCIZI + SOLUZIONI
Dal lavoro di gruppo sugli integrali del 27 novembre 2009

1. $\int \frac{3x^2 + \cos x}{x^3 + \sin x - 5} dx$

2. $\int \frac{1 + tg^2 x + 4x^3 + e^x}{tgx + x^4 + e^x} dx$

3. $\int tg^2 x(1 + tg^2 x) dx$

4. $\int \arctan^2 x \frac{1}{1 + x^2} dx$

5. $\int ctgx dx$

6. $\int (\frac{x^3}{3} + 4)^2 x^2 dx$

7. $\int \arctan^2 x \frac{1}{1 + x^2} dx$

8. $\int \frac{-\sin x \log x + \frac{\cos x}{x}}{\cos x \log x} dx$

9. $\int -\sin x \log x dx$ ELIMINARE

10. $\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx} dx$

11. $\int (ar\cos x)^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$

12. $\int \frac{\cos x^2 \; 2x}{\text{sinx}^2} dx$

13. $\int tg^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx$

14. $\int x \sin x dx$

15. $\int \frac{1}{x\log x}dx$

16. $\int (x^3+x^2+1)^3(3x^2+2x)dx$

17. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

18. $\int ar\cos^2 x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

19. $\int -\sin x^2 \cdot 2xdx$

20. $\int \frac{1}{x}\frac{1}{\log x}dx$

21. $\int e^x \cos xdx$

22. $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+5}dx$

23. $\int \left(x^4+x^3+\log x\right)^3\left(4x^3+3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$

24. $\int \sqrt{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx$

25. $\int \log^2(\arctan x)\cdot\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

26. $\int \frac{\cos x}{[\arctan(\sin x)](1+\sin^2 x)}dx$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{1-\log^2 x}}\cdot\frac{1}{x}dx$

28. $\int \arcsin xdx$

29. $\int 40\cos x\sin xdx$

30. $\int (\arcsin(x+1))^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx$

31. $\int 2\arctan x dx$

32. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx$

33. $\int \frac{1+tg^2 x}{tgx} dx$

. 34. $\int \frac{-\frac{2\arctan x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2} dx$

35. $\int e^x \left(x^2+6x+3\right) dx$

36. $\int e^{10x} dx$

37 $\int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \, dx$

Soluzioni

(a) Sono del tipo:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

e quindi = $\log\left|f(x)\right| + C$

gli integrali numero:

1, 2, 5, 8, 10, 12, 15, 17, 20, 22, 26 (dove $f(x) = \arctan(\sin x)$), 33, 34 (a meno del segno, dove $f(x) = (\arctan x)^2$), 37

(b) Sono del tipo:

$\int f^n(x) f'(x) dx$

e quindi = $\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}$

gli integrali numero:

3 (dove n=2), 4 (n=2), 6 (n=2; questo integrale comunque si potrebbe svolgere direttamente, visto che si tratta di un polinomio), 7 (uguale al 4), 11 (n=3), 13 (n=2), 16 (n=3, anche questo comunque è un polinomio), 18 (n=2), 23 (n=3), 24 (n=$\frac{1}{2}$), 25 (n=2, $f(x) = \log(\arctan x)$), 29 (dove n=1), 30 (dove n=π)

(c) Da eseguire per parti nel modo standard:

14, 31, 35

(d) Sono del tipo:

$\int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + C$ (dove G è una primitiva di g) i seguenti:

19 (dove $g(f(x)) = -\sin x^2$, e quindi $G(f(x)) = \cos x^2 + C$)

27 (dove $g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\log^2 x}}$, e $f(x) = \log x$, quindi $G(f(x)) = \arcsin \log x$)

32 (dove $g(f(x)) = e^{tgx}$, $f(x) = tgx$, e quindi $G(f(x)) = e^{tgx} + C$)

Rimangono i numeri: 9 (ELIMINARE), 21, 28, 36. Vediamoli:

21. $\int e^x \cos x dx$

si risolve applicando due volte l'integrazione per parti, e quindi trattando l'espressione ottenuta come un'equazione in cui l'incognita è l'integrale stesso, che compare sia a sinistra che a destra dell'uguale

28. $\int \arcsin x dx$

per parti, assumendo 1 come fattore differenziale e arcsinx come fattore finito

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

l'ultimo integrale è del tipo $g(f(x))f'(x)$, dove $f(x) = 1 - x^2$, e $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}}$

36. E' immediato:

$$\int e^{10x} dx = \frac{1}{10} \int 10 e^{10x} dx = \frac{1}{10} e^{10x} + C$$