B

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 9 FEBBRAIO 2010

1.
1.1 Fare l'esempio di una funzione avente asintoto verticale la retta x = -1.
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}$$

$$f(x) = \log(x+1)$$

1.2 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia insieme immagine]1,3[.
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x + 2$$

1.3 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e discontinua in x=3.
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x<3 \\ \mathrm{x}^2 & \mathrm{x} \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \mathrm{x} \neq 3 \\ 10 & \mathrm{x} = 3 \end{cases}$$

2. Riconoscere quante soluzioni ha l'equazione:

$$e^{\frac{1-x}{x^2}} = x^2$$

Si tratta di riconoscere se e quante volte i grafici delle due funzioni si incontrano.
Il grafico di x^2 lo conosciamo.

Vediamo di tracciare il grafico di $e^{\frac{1-x}{x^2}}$: naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).
La funzione è definita su $R-\{0\}$.
Vediamo i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = 1 = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1-x}{x^2}} = +\infty = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1-x}{x^2}}$$

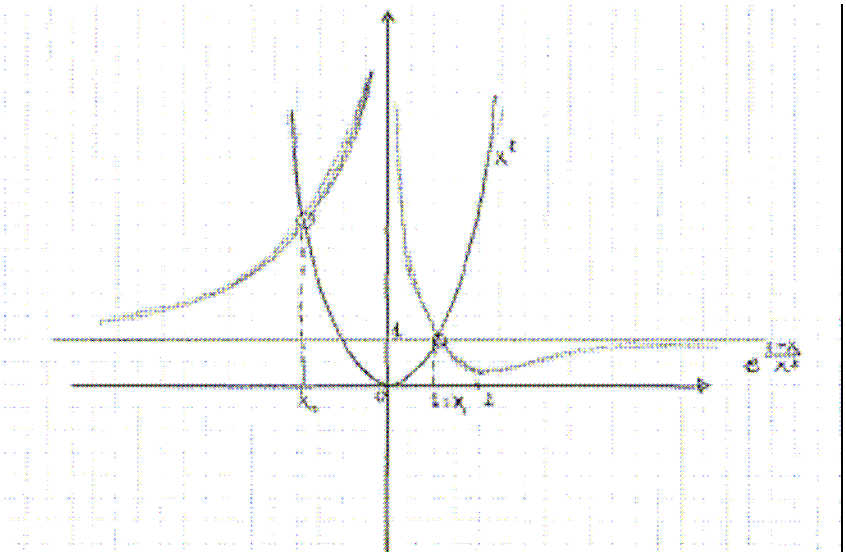
La funzione è sempre positiva.
Studiamo la monotonia della funzione:

$$y' = e^{\frac{1-x}{x^2}} \frac{-x^2-2x(1-x)}{x^4} = e^{\frac{1-x}{x^2}} \frac{x^2-2x}{x^4}$$

B

$y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ oppure $\quad x > 2$

Quindi y cresce fino a $x = 0$, decresce da $x = 0$ a $x = 2$ (punto di minimo relativo).
A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni:



I grafici si intersecano in 2 punti di ascissa x_0 e $x_1=1$: x_0 e x_1 saranno le due soluzioni dell'equazione data.

3.
Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato. In caso affermativo trovare un punto x_0 che ha le proprietà descritte nell'enunciato.
$f(x) = \log^2 x - \log x \quad$ in $[1, e]$

L'enunciato del teorema di Rolle è il seguente:
Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b], e f(a)=f(b). Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che $f'(x_0) = 0$

Le prime due ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].
La funzione data è derivabile e continua in ogni intervallo in quanto somma e composizione di funzioni derivabili (e continue).
Controlliamo l'ipotesi: f(a)=f(b)
$f(1) = 0 = f(e)$
Quindi dobbiamo trovare x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = 2\log x \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(2\log x - 1)$$

$$\frac{1}{x}(2\log x - 1) = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

B

$x_0 = \sqrt{e}$ è il punto cercato.

4.
Trovare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione f e dall'asse x, nell'intervallo indicato:
$f(x) = (x^2 - 4)e^x$ in [0, 4]

L'area coincide con l'integrale se la funzione è positiva, con l'opposto dell'integrale se la funzione è negativa. Si tratta quindi di riconoscere in quali sottointervalli dell'intervallo $[0,4]$ la funzione data è positiva / negativa.

$(x^2 - 4)e^x > 0 \Leftrightarrow x < -2$ oppure $x > 2$
Quindi in $[0,4]$ la funzione è negativa fra 0 e 2, positiva fra 2 e 4. Perciò:
$$A = -\int_0^2 (x^2 - 4)e^x dx + \int_2^4 (x^2 - 4)e^x dx$$

$$\int (x^2 - 4)e^x dx = (x^2 - 4)e^x - \int 2xe^x dx = (x^2 - 4)e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = (x^2 - 4)e^x - 2xe^x + 2e^x + C =$$

$$= e^x (x^2 - 2x - 2) + C$$
$$A_1 = -\int_0^2 (x^2 - 4)e^x dx = -\left[e^x (x^2 - 2x - 2) \right]_0^2 = 2e^2 - 2$$

$$A_2 = \int_2^4 (x^2 - 4)e^x dx = \left[e^x (x^2 - 2x - 2 \right]_2^4 = 6e^4 + 2e^2$$
Quindi:
$A = A_1 + A_2 = 6e^4 + 4e^2 - 2$