C

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 21 GENNAIO 2010

1.
1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia periodo uguale a 3.

Fra gli esempi che avete fatto (corretti):
$$f(x) = \sin \frac{2\pi}{3} x$$

1.2 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia massimo ma non minimo.

Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = -|x|$$
$$f(x) = -x^2$$
$$f(x) = -|\arctan x|$$
$$f(x) = -\sqrt{x}$$

1.3 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia come insieme immagine]5, +∞[.

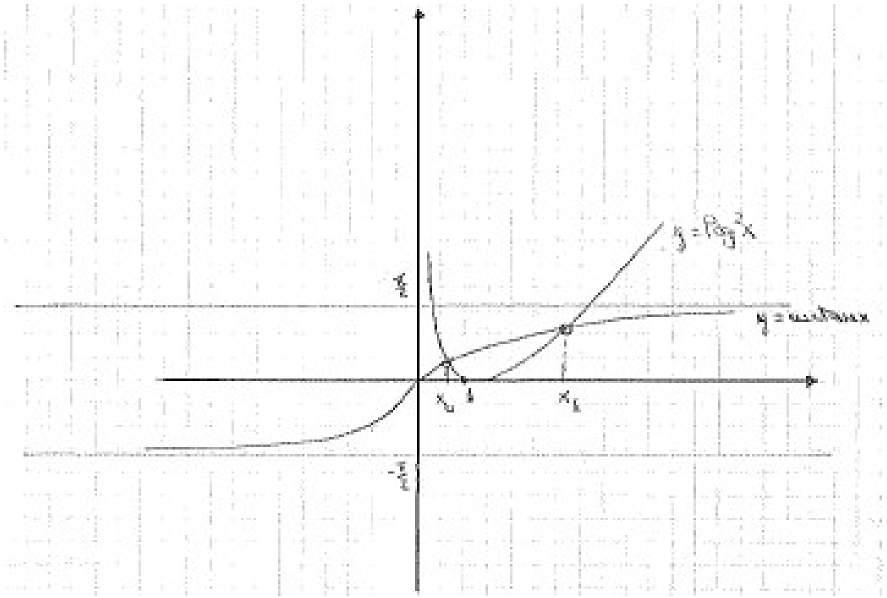
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):
$$f(x) = e^x + 5$$

2. Risolvere graficamente l'equazione:
$$\log^2 x = \arctan x$$

Si tratta di riconoscere se e quante volte i grafici delle due funzioni si incontrano.
Il grafico di $f(x) = \arctan x$ lo conosciamo.
Vediamo di tracciare il grafico di $\log^2 x$: naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).
Il dominio è:
$X =]0,+\infty[$
Vediamo i limiti:
$$\lim_{x\to 0^+} \log^2 x = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \log^2 x = +\infty$$

Studiamo la monotonia della funzione:
$$y' = 2(\log x)\frac{1}{x}$$
Quindi y' è negativa in $]0,1[$ e positiva in $]1,+\infty[$, perciò per x<1 la funzione è decrescente, e per x>1 è crescente: quindi x=1 è punto di minimo relativo (con ordinata =0).
A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni:

C



I grafici si intersecano in 2 punti di ascissa x_0 e x_1: x_0 e x_1 saranno le due soluzioni dell'equazione data.

3. Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo indicato. In caso affermativo trovare un punto xo che ha le proprietà descritte nell'enunciato.
$f(x) = x^3 + x - 1$ in [0, 2]

L'enunciato del teorema di Lagrange è il seguente:
Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b]. Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].
La funzione data è derivabile e continua in ogni intervallo in quanto somma di funzioni continue e derivabili.
Cerchiamo quindi x_0 appartenente a]0, 2 [:

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9 - (-1)}{2} = 5$$

Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

Quindi dobbiamo cercare x tale che:

$$3x^2 + 1 = 5$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ è l'unica soluzione che appartiene all'intervallo dato.

C

4.

4.1 $\int \frac{x^2-4}{x^2-1}dx$

E' l'integrale di una funzione razionale. Dividiamo il polinomio al numeratore per il polinomio al denominatore perché numeratore ha grado uguale al denominatore. Otteniamo:

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = 1 + \frac{-3}{x^2-1}$$

Quindi:

$$\int \frac{x^2-4}{x^2-1}dx = \int dx - \int \frac{3}{x^2-1}dx = x - \int \frac{3}{x^2-1}dx$$

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$3 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$3 = x(A+B) + A - B$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=3 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2-4}{x^2-1}dx = x - (\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}dx) = x - \frac{3}{2}\log|x-1| + \frac{3}{2}\log|x+1| + C$$

4.2 $\int (x^2-1)\sin x dx$

Per parti, prendendo *sinx* come fattore differenziale:

$$\int (x^2-1)\sin x dx = (x^2-1)(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx = (x^2-1)(-\cos x) + 2(x\sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= (x^2-1)(-\cos x) + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

4.3 $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$