CAPITOLO 1: LE PRINCIPALI FIGURE GEOMETRICHE

1.1 La geometria come sistema ipotetico-deduttivo

Abbiamo ormai imparato che in matematica ci vogliono dei punti di partenza, che abbiamo chiamato assiomi, e degli enti primitivi che saranno 'definiti' implicitamente (cioè descritti) da tali assiomi.
Lo abbiamo visto per il concetto di insieme e per quello di numero naturale.
Per quanto riguarda la geometria, il primo grande tentativo di esplicitare degli assiomi è dovuto ad Euclide con i suoi Elementi (circa 300 a.C.).

Euclide enuncia 5 assiomi, che chiama 'postulati':
Postulato 1. *Si possa condurre una retta da qualsiasi punto a ogni altro punto.*
Postulato 2. *Si possa prolungare una retta continuamente per diritto.*
Postulato 3. *Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi distanza.*
Postulato 4. *Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.*
Postulato 5. *Se una retta, che cade su (interseca) due rette, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrino dalla parte in cui sono i due angoli minori di due angoli retti.*

Nell'approccio di Euclide si danno in realtà delle 'definizioni' ingenue di punto ("un punto è ciò che non ha parti"), di retta ("una linea che giace ugualmente rispetto ai suoi punti"), di piano ("una superficie che giace ugualmente rispetto alle sue rette"). Una sistemazione rigorosa e completa in senso moderno della trattazione di Euclide è stata data dal matematico David Hilbert nel suo *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della Geometria) nel 1899. Nell'approccio di Hilbert, che non fa alcun riferimento all'intuizione e alla percezione spaziale, punti, rette e piani sono enti primitivi, definiti implicitamente dagli assiomi[1]. Ci sono però anche altre 'assiomatiche', che differiscono per il tipo di assiomi scelti: un esempio particolarmente interessante dal punto di vista didattico è quello dato dal matematico Gustave Choquet (1915-2006) nel suo libro *L'insegnamento della geometria* (1967).

Non ci interessa qui dare un elenco completo di assiomi, che descrivono il comportamento degli oggetti geometrici primitivi che ben conosciamo a livello intuitivo: punto, retta, piano (se ci mettiamo nello spazio a tre dimensioni). Naturalmente sarebbe necessario farlo se volessimo evidenziare come si possono costruire i vari risultati che conosciamo in geometria a partire da tali assiomi.
Infatti, come abbiamo già sottolineato parlando in generale della struttura della matematica, a partire dagli enti primitivi e dagli assiomi vengono definiti altri concetti (ad esempio potremo dare la definizione di rette parallele o perpendicolari), e vengono dedotti dei risultati (i "teoremi": ad esempio il teorema di Talete, o il teorema di Pitagora) a partire dai quali ancora si costruiranno altre definizioni e si potranno dimostrare altri risultati, in una catena deduttiva.
Ogni teorema quindi si può dimostrare a partire dagli assiomi e da teoremi precedenti.

A livello scolastico questo procedimento (detto ipotetico-deduttivo) caratterizza l'insegnamento della geometria della scuola superiore.

[1] Attenzione: dire quindi che quello di 'retta' è un concetto primitivo non significa far riferimento alla nostra intuizione percettiva di retta, ma definire implicitamente la retta attraverso le sue proprietà, descritte dagli assiomi (ad esempio che per due punti distinti passa una e una sola retta).

Nella scuola dell'infanzia e della scuola primaria l'insegnamento della geometria invece richiede un'impostazione diversa. Freudenthal (1973), alla domanda "Che cos'è la geometria a livello di base?", rispondeva: "Senza dubbio dobbiamo rispondere: la geometria è possesso dello spazio. E poiché parliamo dell'educazione dei bambini, essa è possesso dello spazio nel quale il bambino vive, respira e si muove. Lo spazio che il bambino deve imparare a conoscere, esplorare, conquistare per vivervi, respirare e muoversi meglio.".

L'insegnamento della geometria comunque viene ripreso nei diversi livelli di scuola: a questi livelli di scuola corrispondono non solo contenuti parzialmente diversi, ma anche diverse modalità d'approccio. Una delle più note articolazioni di queste modalità (v. Villani, 2006) è quella elaborata dai coniugi van Hiele:
Livello 1 (*visuale*).Le figure geometriche vengono riconosciute e identificate globalmente in base al loro aspetto e alla loro forma. Le proprietà matematiche non giocano alcun ruolo esplicito in tale identificazione.
Livello 2 (*descrittivo*). Le figure vengono identificate in base a certe loro proprietà matematiche. Tali proprietà vengono enucleate attraverso un processo di generalizzazione, a partire dall'osservazione di un ristretto numero di esempi. Non si considerano i legami né le gerarchie esistenti tra le varie proprietà.
Livello 3 (*razionale*). Si riconoscono i legami e le gerarchie esistenti tra le diverse proprietà di una figura, nonché le relazioni che intercorrono fra figure diverse.
Livello 4 (*logico*). Si comprende la struttura di un sistema assiomatico e il ruolo dei procedimenti deduttivi. Si sanno usare condizioni necessarie e sufficienti. Si è in grado di comprendere semplici dimostrazioni, non solo di impararle a memoria.
Livello 5 (*critico*). Si sanno confrontare tra loro vari sistemi assiomatici e si è in grado di esplorare geometrie diverse, basate su differenti sistemi di postulati.

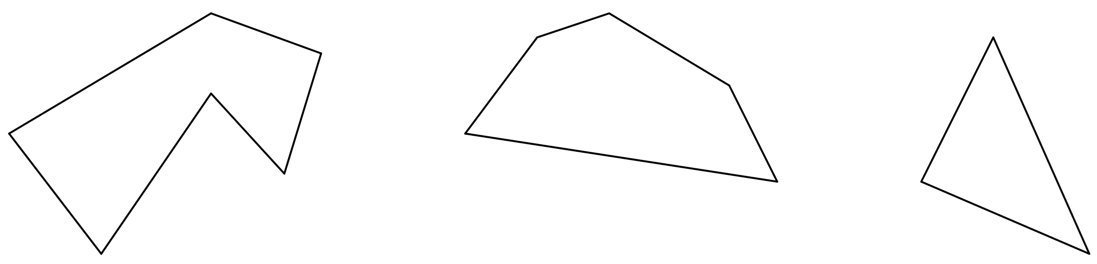
C'è una gerarchia fra questi livelli, nel senso che il passaggio ad un certo livello richiede la comprensione e interiorizzazione dei livelli precedenti. Secondo Villani, nella situazione italiana in prima approssimazione i cinque livelli di van Hiele corrispondono ai cinque livelli scolari: scuola dell'infanzia, scuola elementare, scuola media, scuola superiore, università.

Per quanto riguarda i contenuti, per la scuola primaria il percorso di geometria è delineato dagli Orientamenti per il curriculum (vedi Appendice).
Fra gli Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria si fa riferimento in particolare alla capacità di **Descrivere e classificare figure geometriche.**
Cominciamo quindi col ricordare alcune importanti figure geometriche e loro proprietà, a partire dai *poligoni*.

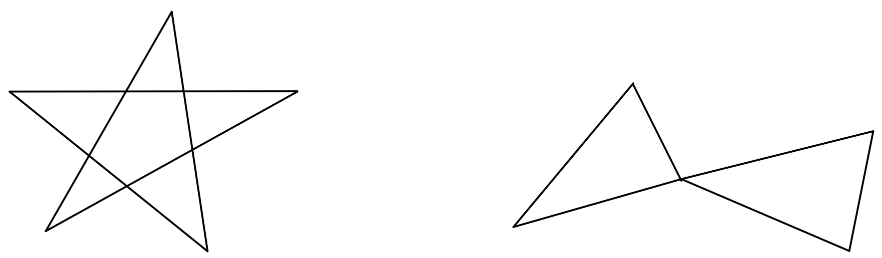
1.2 Poligoni, triangoli, quadrilateri

Come potremmo definire un poligono?
Una definizione frequente è:
"Si dice poligono una regione del piano il cui bordo è formato da una spezzata chiusa[2]."
Dove per 'spezzata' si intende un insieme di segmenti consecutivi (che hanno cioè un estremo in comune) ma non adiacenti, e per 'chiusa' si intende che l'estremo di un segmento è comune a quello di un altro segmento:

[2] Per alcuni (ad esempio per Hilbert) invece il poligono è proprio la spezzata chiusa, cioè il bordo.



A volte per maggior precisione si aggiunge che la spezzata dev'essere 'non intrecciata' per evitare casi 'patologici' tipo:

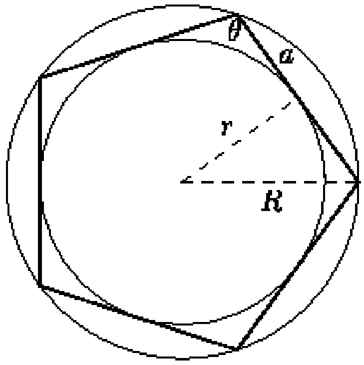


In realtà, come osserva Villani (2006), definire con precisione un poligono è molto più complesso di quello che potrebbe apparire a prima vista: "codificare la nozione di poligono mediante una definizione appropriata a tutte le circostanze nelle quali il termine viene usato" appare difficile, se non impossibile; "sarebbe inopportuno dare definizioni troppo generali di 'poligono' (o di qualsiasi altro ente matematico) se si prevede di farne uso solo in casi molto particolari, sarebbe altrettanto inopportuno limitarsi a darne definizioni troppo restrittive se si prevede di avere a che fare con casi che non rientrerebbero nelle definizioni date" (pp. 243-244).
A livello didattico quindi certi dettagli e finezze rischiano di diventare controproducenti, se introdotti troppo prematuramente: e questo vale naturalmente in particolare per la scuola primaria.

Una volta che condividiamo la nozione di poligono, possiamo classificare i poligoni in tanti modi, ad esempio a seconda del numero dei lati (o equivalentemente dei vertici, o degli angoli).
Così un poligono di 3 lati si dirà triangolo; un poligono di 4 lati si dirà quadrilatero; e poi pentagono (5 lati), esagono (6 lati), ettagono (7 lati), ecc.

Il mondo dei poligoni si presta a molte altre classificazioni, che ci permettono di fare un po' d'ordine.

Intanto, si parla di poligoni regolari e irregolari.
Un poligono si dice **regolare** se ha lati ed angoli uguali.
Un poligono regolare ha la proprietà che i suoi vertici stanno su una circonferenza (che si dice circoscritta al poligono), e i punti medi dei lati stanno su un'altra circonferenza (che si dice inscritta nel poligono), che ha lo stesso centro. Tale centro si dice anche centro del poligono regolare.
Il raggio della circonferenza inscritta si dice *apotema* del poligono.



Un poligono si dice **irregolare** se non è regolare.

Esercizio 1.1
Se un poligono ha tutti i lati uguali, ha necessariamente anche tutti gli angoli uguali?
E se ha tutti gli angoli uguali, ha necessariamente anche tutti i lati uguali?

Esercizio 1.2
Secondo la definizione che abbiamo dato, un poligono è regolare se ha tutti gli angoli uguali e tutti i lati uguali.
Un poligono, quindi, è irregolare (cioè: non è regolare) quando ha:
a) tutti i lati e gli angoli fra loro disuguali
b) tutti gli angoli uguali ma i lati disuguali
c) almeno una coppia di lati disuguali e almeno una coppia di angoli disuguali
d) almeno una coppia di lati disuguali oppure almeno una coppia di angoli disuguali.

Andiamo ad esplorare adesso il mondo dei poligoni che hanno 3 lati (cioè i triangoli) e 4 lati (cioè i quadrilateri).

1.2.1 I triangoli

Alcuni risultati importanti sui triangoli, che a livello di scuola primaria si possono anche far vedere attraverso la manipolazione (di bastoncini, o fogli):

1. Criteri di uguaglianza (o di 'congruenza') dei triangoli:
1° criterio: Se due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso fra essi ordinatamente congruenti, i due triangoli sono congruenti.
2° criterio: Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e due angoli ad esso adiacenti, essi sono congruenti.
3° criterio: Se due triangoli hanno i lati ordinatamente congruenti, essi sono congruenti.

2. In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altre due e maggiore della loro differenza.
Ad esempio non si può costruire un triangolo di lati 3 cm, 4 cm, e 8 cm: il triangolo non si "chiude".

3. In un triangolo la somma degli angoli interni è 180°.
Da un triangolo di carta si ritagliano due 'angoli' e si mettono accanto al terzo.

Abbiamo parlato di angoli uguali: ma cosa si intende per **angolo**?
Le definizioni di angolo che si trovano sono diverse. Fra le più frequenti:
"Si dice angolo l'intersezione di due semipiani"

“Si dice angolo una coppia di semirette aventi la stessa origine”.
A maggior ragione per l’angolo si possono ripetere le osservazioni fatte da Villani a proposito della definizione dei poligoni.
Dal punto di vista didattico è importante comunque cercare di evitare che i bambini costruiscano misconcetti, che nel caso dell’angolo sono particolarmente diffusi. Ad esempio a volte le semirette ‘diventano’ segmenti, ed un angolo viene considerato più o meno grande a seconda della lunghezza dei suoi lati.

Torniamo ai nostri triangoli.
I triangoli si possono classificare in base ai lati, ottenendo:
Triangolo scaleno: ha tutti e tre i lati diversi
Triangolo isoscele: ha due lati uguali
Triangolo equilatero: ha i tre lati uguali

I triangoli si possono classificare anche in base agli angoli:
Triangolo acutangolo: ha tutti gli angoli acuti
Triangolo rettangolo: ha un angolo retto
Triangolo ottusangolo: ha un angolo ottuso

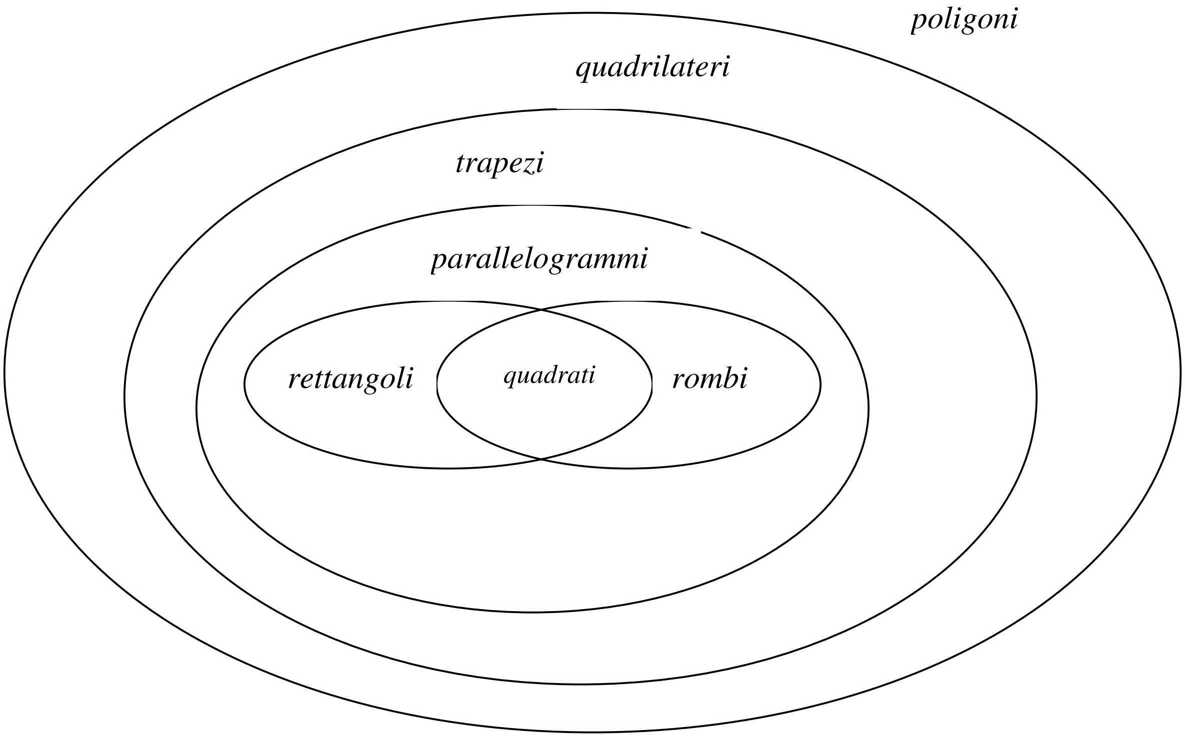
<u>Esercizio 1.3</u>:
Nella tabella che segue in corrispondenza di ogni combinazione fra le righe e le colonne (ad esempio scaleno/acutangolo):
- se ritieni che la combinazione sia possibile disegna un triangolo che abbia entrambe queste caratteristiche
- in caso contrario spiega perché la combinazione non è possibile.

	Acutangolo	Rettangolo	Ottusangolo
Scaleno			
Isoscele			
Equilatero			

<u>Esercizio 1.4</u>: Sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, riesci a trovare quanto vale la somma degli angoli interni di un quadrilatero? E di un pentagono? E di un poligono di n lati?

1.2.2 I quadrilateri
Ricordiamo le “classiche” definizioni che abbiamo imparato dalle scuole elementari:
Un *quadrilatero* è un poligono con 4 lati.
Un *trapezio* è un quadrilatero con almeno due lati paralleli.
Un *parallelogrammo* (o parallelogramma) è un quadrilatero con due coppie di lati paralleli.
Un *rettangolo* è un quadrilatero con i quattro angoli retti.
Un *rombo* è un quadrilatero con i quattro lati congruenti.
Un *quadrato* è un quadrilatero con i quattro lati congruenti e i quattro angoli retti.

Utilizzando i diagrammi di Eulero Venn si ottiene la seguente rappresentazione:



Esercizio 1.5:
A volte invece il trapezio viene definito come un quadrilatero che ha *solo* due lati paralleli.
Come cambia allora la rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero Venn?

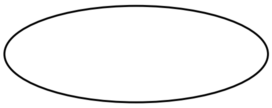
Esercizio 1.6:
Costruire dei quadrilateri, disegnando due segmenti della stessa lunghezza da un bordo all'altro di una striscia.
Classificare i quadrilateri così ottenuti.

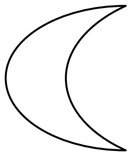
Esercizio 1.7:
Se diciamo che un rombo è un parallelogramma con le diagonali perpendicolari, otteniamo lo stesso insieme di quadrilateri individuato dalla definizione data prima ("un rombo è in quadrilatero con i quattro lati congruenti")?
In altre parole, le due definizioni sono equivalenti oppure no?

Esercizio 1.8:
Si può dire che un quadrato è un rombo con i quattro angoli uguali?

Osservazione: A volte gli allievi (e non solo) danno definizioni 'ridondanti': cioè introducono nella definizione delle caratteristiche che non è necessario introdurre, in quanto seguono necessariamente dalle altre.
Ad esempio, se definisco un quadrato come "un quadrilatero con quattro lati uguali e i quattro angoli uguali e retti", una delle due caratteristiche "quattro angoli uguali" e "quattro angoli retti" è inutile, perché discende dall'altra.
In matematica l'essenzialità di una definizione è apprezzata, anche perché semplifica la vita del matematico quando deve dimostrare (dimostrare che un oggetto ha due caratteristiche è più semplice che dimostrare che ne ha di più). Nell'insegnamento spesso succede che l'allievo consideri le definizioni come delle 'descrizioni' di un oggetto, e quindi ritenga che più caratteristiche elenca,

meglio è. E d'altra parte se non si deve dimostrare o risolvere problemi, cioè se la definizione non è legata a degli 'scopi', è difficile comprendere perché una definizione essenziale è 'meglio' di una ridondante. E' importante quindi – se vogliamo far cogliere il senso dell'essenzialità di una definizione – predisporre attività significative in cui l'allievo ne percepisca l'utilità.
In ogni caso – ridondante od essenziale che sia – da una definizione matematica si 'pretende' che caratterizzi l'oggetto che intende definire: cioè che non solo ne dia le proprietà, ma che dia esattamente quelle proprietà che distinguono quell'oggetto dagli altri. Ad esempio "La circonferenza è una linea curva chiusa", pur essendo un'affermazione corretta, non è una definizione di circonferenza, perché la proprietà di "essere una curva chiusa" non è caratteristica che 'individua' la circonferenza. Ad esempio la possiedono anche le seguenti figure:





1.3 Circonferenza e cerchio

Fra le figure geometriche che non sono poligoni, la più importante è il *cerchio*.
Cominciamo col definire la *circonferenza* come l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto fisso C detto centro. La distanza dei punti della circonferenza dal centro si dice *raggio*.
Si dice cerchio (di centro C e raggio r, dove r>0) l'insieme dei punti del piano che ha distanza dal centro minore di r.
Per circonferenza si intende quindi il 'bordo', mentre il cerchio è l'insieme dei punti interni.

Le figure geometriche – in particolare quelle che qui abbiamo ripreso - si possono confrontare in tanti altri modi, cioè rispetto ad altre caratteristiche.
Ad esempio possiamo parlare dell'*area* di un poligono o di un cerchio, della *lunghezza* del bordo di un poligono (detta *perimetro*) o della lunghezza della circonferenza, o ancora dell'*ampiezza* di un angolo. A queste grandezze (area / lunghezza / ampiezza) associamo poi dei numeri: la loro *misura*.
Nel prossimo capitolo cerchiamo di 'sistemare' questi concetti.

CAPITOLO 2: GRANDEZZE GEOMETRICHE E LORO MISURA

2.1 Grandezze e loro misura

Il concetto di 'grandezza' è uno di quelli che non si possono definire direttamente, ma che viene definito implicitamente dal fatto che due grandezze si possono confrontare e sommare.
Ad esempio il *peso* di un oggetto è una grandezza:

1. Di due oggetti posso dire qual è il più pesante
2. Posso pensare al peso somma (il peso dei due oggetti insieme).

Più in generale una classe di grandezze è un insieme tale che due suoi elementi qualsiasi (quindi due grandezze):
- possono essere confrontati, dando luogo ad un ordinamento nell'insieme stesso
- possono essere sommati, e tale operazione gode della proprietà associativa e commutativa.

A partire dalla somma è possibile definire i multipli di una grandezza, e poi i sottomultipli, per arrivare poi a definire il rapporto fra grandezze (si veda più avanti il caso delle lunghezze), che in generale è un numero reale positivo.

Le proprietà delle grandezze che abbiamo elencato permettono di passare alla loro **misura**.
Misurare una grandezza A significa farne il rapporto rispetto ad una grandezza U della stessa classe, che si dice unità di misura. Questo rapporto si dice **misura di A rispetto a U**, ed è un numero reale positivo.

Potremmo quindi dire che dal 'contare' al 'misurare' si compie il salto dall'insieme dei numeri naturali all'insieme dei numeri reali (positivi). In realtà questo a livello teorico, perché a livello pratico utilizziamo strumenti di misura che *approssimano* (con il grado di precisione richiesto dal problema e permesso dallo strumento di misura) la misura a numeri decimali limitati. In altre parole dal punto di vista pratico sono sufficienti i numeri razionali, anzi, i numeri razionali che si possono scrivere come frazioni decimali.

La misura gode di alcune proprietà generali:
1. La misura della grandezza somma di due grandezze A e B è uguale alla somma delle misure di A e B:
$m(A+B)=m(A)+m(B)$
2. Se $A \leq B$ allora $m(A) \leq m(B)$
3. Il rapporto di due grandezze omogenee è uguale al rapporto delle rispettive misure:
$A/B= m(A)/m(B)$

Le grandezze importanti in geometria sono le cosiddette *grandezze geometriche*:
Lunghezza di un segmento
Area di una superficie
Volume di un solido
Ampiezza di un angolo

Per le grandezze geometriche valgono anche le condizioni di *densità* (fra due grandezze geometriche, ad esempio fra due lunghezze, ce n'è sempre una intermedia), e di *continuità* (fissato un qualsiasi numero reale positivo, esistono sempre due grandezze che abbiano quel numero come rapporto).

2.2 Lunghezza di un segmento

Per precisare la nozione di **lunghezza di un segmento** cominciamo col porci il problema del *confronto* di due segmenti.
Facciamo riferimento all'esperienza fisica di confrontare due bastoncini diritti: chiamiamo A e B gli estremi del primo bastoncino, C e D gli estremi del secondo. Per confrontarli possiamo 'affiancare ' il bastoncino CD su AB in modo A coincida con C. Se anche D coincide con B diciamo che i due

bastoncini sono uguali (o congruenti); se il bastoncino CD 'sporge' diciamo che CD è maggiore di AB (o che AB è minore di CD).
Nella pratica questo confronto lo possiamo fare (o a volte addirittura lo dobbiamo fare) indirettamente: prendiamo un terzo bastoncino come riferimento, e confrontiamo ognuno dei due bastoncini con tale bastoncino, che è l'unico che si sposta.
Passando ai segmenti, immaginiamo di sovrapporre CD ad AB in modo che gli estremi A e C coincidano, e che D giaccia sulla retta AB. Se anche D e B coincidono, diremo che i segmenti sono congruenti, se D sta tra A e B, diremo che AB è maggiore di CD (o che CD è minore di AB).
Si può dimostrare che la relazione di congruenza nell'insieme dei segmenti è una relazione d'equivalenza[3].
A questo punto possiamo definire la lunghezza di un segmento AB come la classe di equivalenza alla quale appartiene il segmento AB.
In altre parole potremmo definire la lunghezza come la proprietà comune a tutti i segmenti sovrapponibili.

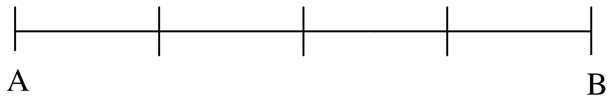
Il passo successivo è quello di **passare dalle lunghezze dei segmenti alla loro misura.**
Ritornando all'esempio dei bastoncini, quello che facciamo quando misuriamo la lunghezza di un bastoncino è di utilizzare un bastoncino di riferimento (ad esempio il metro dei falegnami), e vedere 'quante volte' questo 'sta' nel bastoncino che voglio misurare: in realtà quello che leggiamo sul metro è un'approssimazione di tale numero.
Ma cerchiamo di capire meglio cosa vuol dire dal punto di vista teorico quel "quante volte ci sta".

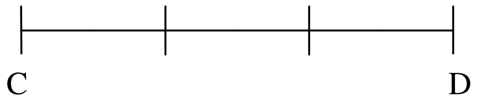
Abbiamo visto che i segmenti si possono confrontare, e che da questo confronto emerge la nozione di *lunghezza*. Possiamo definire una 'somma' (in senso geometrico) fra due lunghezze l_1 e l_2: dati due segmenti AB e BC adiacenti (cioè che stanno sulla stessa retta ed hanno un estremo in comune) di lunghezze rispettivamente l_1 e l_2 si può definire 'somma' delle lunghezze l_1 e l_2 la lunghezza del segmento AC.
Se i segmenti non sono adiacenti, ci si riporta al caso precedente 'trasportando' uno dei due fino ad essere adiacente all'altro.
La lunghezza di un segmento AB in genere si indica con $\overline{AB}$.

Una volta che abbiamo definito la somma di lunghezze di segmenti possiamo definire i *multipli* di una lunghezza. Se ho la lunghezza $\overline{AB}$ di un segmento dato AB, le lunghezze multiple di $\overline{AB}$ saranno le lunghezze del tipo $n\overline{AB}$, con n numero naturale; dato un certo n (numero naturale) la lunghezza $n\overline{AB}$ è la lunghezza che si ottiene 'sommando' n volte la lunghezza $\overline{AB}$ (che si può ottenere riportando n volte di seguito il segmento AB e poi considerando la lunghezza del segmento così ottenuto: ad esempio il triplo della lunghezza del segmento AB sarà la lunghezza del segmento ottenuto mettendo di seguito tre volte il segmento AB).
Analogamente potremo parlare di sottomultipli: se $\overline{AB}$ è una lunghezza multipla della lunghezza $\overline{CD}$, diremo che la lunghezza $\overline{CD}$ è sottomultipla della lunghezza $\overline{AB}$.

A questo punto possiamo fare un altro passo, e considerare lunghezze $\overline{CD}$ che sono multipli di sottomultipli di una lunghezza $\overline{AB}$: ad esempio considerare una lunghezza $\overline{CD}$ che sia il triplo di un quarto della lunghezza del segmento AB.

[3] Le tre proprietà (riflessiva, simmetrica, transitiva) sono evidenti a livello intuitivo. Se volessimo dimostrarle, dovremmo far riferimento ad una scelta di assiomi.



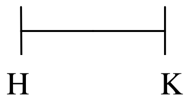


Possiamo scrivere:

$\overline{CD} = 3\frac{1}{4}\,\overline{AB}$

Possiamo anche dire che il ‘rapporto’ fra $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ è il numero (razionale) $\frac{3}{4}$.

In questo caso esiste una lunghezza che è sottomultiplo comune alla lunghezza di AB e di CD, e precisamente la lunghezza $\frac{1}{4}\ \overline{AB}$, uguale alla lunghezza $\frac{1}{3}\,\overline{CD}$;



Più in generale il rapporto fra le lunghezze di due segmenti sarà un numero reale (non necessariamente razionale). Ad esempio il rapporto fra la lunghezza della diagonale di un quadrato e quella del suo lato è $\sqrt{2}$, che non è un numero razionale (cioè non si può scrivere come rapporto di numeri interi). Il passaggio dal caso razionale (che abbiamo visto sopra parlando di multipli e sottomultipli) al caso reale, cioè la spiegazione di cosa vuol dire geometricamente che il rapporto fra le lunghezze di due segmenti è irrazionale, non è per niente banale, in quanto mette in gioco il passaggio dall’insieme dei numeri razionali a quello dei numeri reali.

Possiamo adesso introdurre l’idea di *misura di una lunghezza*.

Diremo che la misura della lunghezza di un segmento AB rispetto alla lunghezza *u* di un segmento assunta come unità di misura è il rapporto fra la lunghezza del segmento AB e la lunghezza *u*. Tale numero è in generale un numero reale positivo. Quando è un numero razionale si dice che i due segmenti sono *commensurabili*; quando è un numero irrazionale si dice che i due segmenti sono *incommensurabili* (ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato).

Come sappiamo ci sono delle unità di misura convenzionali: il metro, il centimetro, il chilometro (ed in generale multipli e sottomultipli del metro secondo le potenze di 10), ma anche il piede, il pollice (utilizzati nei paesi di cultura anglosassone), il miglio nautico internazionale.

Ma l’operazione di misura non comporta necessariamente il riferimento ad un’unità di misura convenzionale.

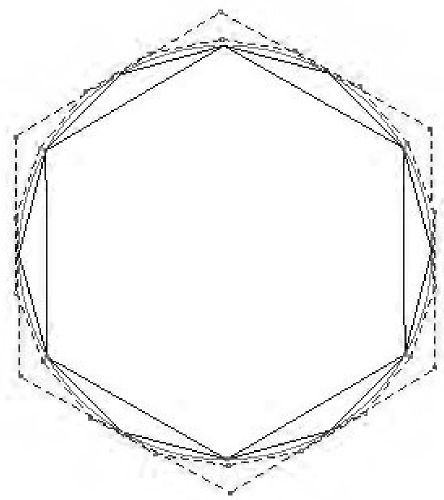
Riassumendo il nostro percorso, siamo partiti dal segmento, ne abbiamo definito la *lunghezza*, e poi siamo arrivati a parlare di *misura di tale lunghezza*, che è un numero reale positivo.

Dal punto di vista concettuale, questi processi sono diversi, ma nel linguaggio scritto e orale (anche quello matematico!) raramente si è così attenti (o pedanti…) da diversificare la lunghezza del segmento con la misura di tale lunghezza.

Dal punto di vista didattico, è opportuno che questi passaggi vengano presentati gradatamente con esperienze diverse, proponendo ai bambini esperienze con la lunghezza dei segmenti prima di parlare della loro misura. Ed in ogni caso l'operazione di misura non comporta necessariamente il riferimento ad un'unità di misura convenzionale: è opportuno anzi che le prime esperienze dei bambini con il concetto di misura passi attraverso unità di misura più naturali e più legate al contesto in cui si opera.
Questa raccomandazione vale in generale per l'introduzione di tutte le grandezze geometriche, e quindi la riprenderemo più volte.

2.3 Lunghezza della circonferenza

A partire dalla lunghezza di un segmento, è possibile definire la *lunghezza di una spezzata* come somma delle lunghezze dei segmenti che la costituiscono. In particolare possiamo definire *perimetro* di un poligono la lunghezza della spezzata che lo individua.
E' possibile poi introdurre la nozione di lunghezza anche per linee curve, in particolare per la circonferenza: anche in questo caso la sistemazione rigorosa di un concetto intuitivo (è facile vedere la lunghezza della circonferenza immaginandola fatta di spago, e immaginando di 'srotolare' tale spago) è piuttosto complessa. Sinteticamente, nel caso della circonferenza il procedimento si basa sull'individuazione di poligoni regolari inscritti e di poligoni regolari circoscritti, per i quali siamo in grado di definire il perimetro: si può dimostrare che al crescere del numero dei lati cresce il perimetro dei poligoni inscritti, e decresce quello dei poligoni circoscritti.



Si può dimostrare che è possibile scegliere il numero n di lati in modo che la differenza fra il perimetro di un poligono di n lati circoscritto e quello del poligono di n lati inscritto sia 'piccola quanto vogliamo'. Questo procedimento – che è tipico dell'analisi matematica – permette di definire la lunghezza della circonferenza come quell'unico numero reale che è contemporaneamente maggiore di tutti i perimetri dei poligoni regolari inscritti e minore di tutti i poligoni regolari circoscritti.

Fin dai tempi di Euclide era noto che il rapporto fra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro è una costante[4], cioè un numero che non dipende dal diametro: a questa costante si dà il nome di π.
Solo nel 1761 il matematico Lambert ha dimostrato che π è un numero irrazionale: la sua rappresentazione decimale è quindi un numero illimitato non periodico, che ha cioè un numero infinito di cifre dopo la virgola, e senza periodi.

La costruzione descritta sopra permette anche di approssimare la misura della lunghezza della circonferenza, a partire dalla misura dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti.
In genere per facilitarsi i calcoli si prendono poligoni di 4, 8, 16, 32 …lati, oppure di 6, 12, 24, …
Ad esempio se si considera la circonferenza di raggio 1 e si prende n=6, si ha che il lato dell'esagono regolare inscritto misura anch'esso 1 (perché l'esagono si può scomporre in 6 triangoli equilateri di lato il raggio).
E' questo il procedimento seguito da Archimede (287-212 a.C.), che a partire dall'esagono regolare, inscritto e circoscritto, per determinare approssimazioni sempre migliori, proseguì raddoppiando ogni volta il numero dei poligoni inscritti e circoscritti sino a giungere a 96 lati.
Raddoppiando il numero dei lati aumentano i perimetri dei poligoni inscritti mentre diminuiscono quelli dei poligoni circoscritti. In questo modo Archimede trova un'approssimazione di π espressa dalla disuguaglianza:

$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{10}{70}$$

Tenendo presente che:

$$3+\frac{10}{71} = \frac{223}{71}$$

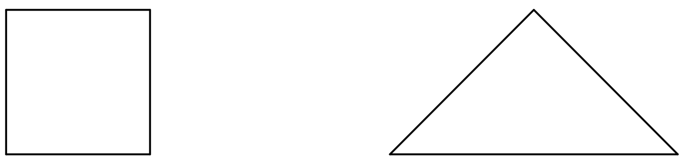
e che il quoziente tra 223 e 71 è - con due cifre decimali - 3,14, risulta che il valore ottenuto da Archimede è vicino a quello attribuito a π in tempi moderni con calcoli più sofisticati.

2.4 Area di una superficie (piana)

L'idea di superficie è molto intuitiva, a come spesso accade in matematica per le nozioni più intuitive, non è affatto semplice darne una definizione rigorosa. Del resto qui l'importante è che l'insegnante abbia chiaro di cosa si sta parlando, ed eventualmente sia consapevole della complessità che sta dietro concetti apparentemente banali. Ma mettiamoci subito nel caso più semplice: quello dei poligoni.

2.4.1 Il caso dei poligoni

Per arrivare a definire l'estensione della superficie di un poligono, potremmo essere tentati di ripetere il procedimento seguito per definire la lunghezza di un segmento, e considerare la relazione di 'congruenza' fra due poligoni (intesa come sovrapponibilità dei due poligoni) per poi passare a verificare che si tratta di una relazione d'equivalenza e quindi 'passare al quoziente'.
Ma secondo questa definizione le due figure seguenti non avrebbero la stessa estensione:

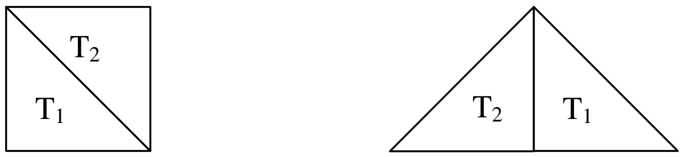


In realtà il buon senso ci dice che l'estensione di una superficie deve essere definita in modo tale che le due figure disegnate sopra abbiano 'la stessa estensione'.

[4] Discende dal fatto che due circonferenze sono 'simili': torneremo sulla nozione di 'similitudine' e su questo risultato quando parleremo delle trasformazioni geometriche.

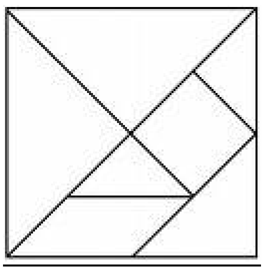
Sistemiamo allora questa idea.
Diciamo che un poligono P **è scomposto in sottopoligoni** P_1, P_2, …P_n se i poligoni P_1, P_2, …P_n sono 2 a 2 disgiunti (esclusi i punti dei 'bordi') e la loro unione è il poligono P.

Ad esempio nel disegno sotto sia il quadrato che il triangolo sono stati scomposti negli stessi triangoli T_1 e T_2 (in questo caso addirittura T_1 e T_2 sono anche uguali fra loro):



Diciamo allora che il quadrato ed il triangolo sono equiscomponibili.
Più in generale diremo che:
Due poligoni sono **equiscomponibili** se è possibile scomporli nello stesso numero di sottopoligoni, a due a due uguali (cioè sovrapponibili).

<u>Esercizio 2.1</u>:



In figura è disegnata una scomposizione di un quadrato in 7 figure: si tratta di un antico "puzzle cinese", il **Tangram**. Combinando tra di loro i sette pezzi del tangram, detti "tan", è possibile ottenere disegni di oggetti, animali, persone, ma anche figure geometriche, ad esempio il quadrato stesso da cui sono ottenuti i pezzi, o il rettangolo e l'esagono. L'unica regola da seguire nel gioco è che bisogna usare per ogni figura tutti e sette i pezzi tan, senza sovrapporli.
Senza ritagliare i pezzi, riconoscete quali pezzi del tangram sono equiscomponibili con il pezzo 'parallelogramma'?

L'equiscomponibilità è una relazione nell'insieme di tutti i poligoni.
E, …indovinate un po'? …si tratta di una relazione di equivalenza, cioè gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva (la dimostrazione delle prime due proprietà è semplice, meno banale quella della terza).
Possiamo quindi considerare l'insieme delle classi d'equivalenza (cioè 'passare al quoziente'): **chiameremo 'area'di un poligono P la classe di equivalenza del poligono P, cioè la proprietà comune a tutti i poligoni equiscomponibili con P.**

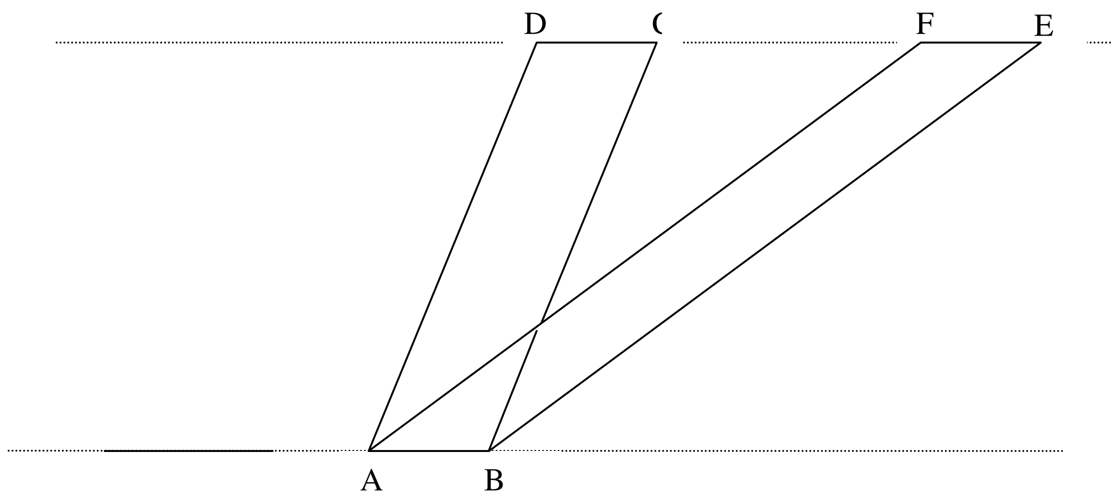
Si ha a questo punto un risultato fondamentale, cioè un

Teorema: Ogni poligono P è equiscomponibile con un rettangolo ABCD, dove uno dei lati del rettangolo, ad esempio AD (= BC), può essere scelto di lunghezza arbitraria, mentre la lunghezza dell'altro lato AB (=DC) resta univocamente determinata.

Riportiamo da Villani (2006, p. 107 e p.110) un cenno della dimostrazione, articolata in 5 passi, in cui si dimostra che:

1. Ogni poligono P è scomponibile in un numero finito di triangoli T_i.
2. Ogni triangolo T_i è equiscomponibile con un rettangolo R_i.
3. Fissato un segmento AD di lunghezza arbitraria, ogni rettangolo R_i è equiscomponibile con un rettangolo avente un lato di lunghezza AD.
4. Se si affiancano i rettangoli R_i lungo i lati di lunghezza prefissata AD in modo da formare un unico rettangolo ABCD avente un lato di lunghezza AD, tale rettangolo è equiscomponibile col poligono P da cui eravamo partiti.
5. La lunghezza dell'altro lato AB (=CD) del rettangolo ABCD è univocamente determinata.

Osservazione: a volte non è facile vedere che due poligoni sono equiscomponibili, mentre è più facile dimostrare che si possono ottenere da due poligoni 'uguali' togliendo poligoni 'uguali'.
Ad esempio, consideriamo due parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza:

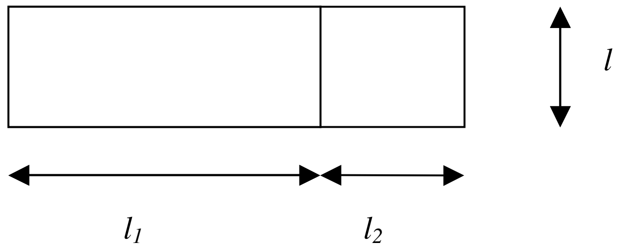


Si possono riconoscere nella figura due triangoli: il triangolo AFD e il triangolo BCE. Tali triangoli sono uguali (perché?). Il parallelogramma ABCD si può vedere come somma del triangolo ABH e del quadrilatero AHCD, che a sua volta si può vedere come differenza fra il triangolo AFD e il triangolo CHF. Il parallelogramma ABEF si può vedere come somma del triangolo ABH (lo stesso di prima) e del quadrilatero BEFH, che a sua volta si può vedere come differenza fra il triangolo BCE (uguale al triangolo AFD) e il triangolo CHF. Quindi i due parallelogrammi si possono ottenere togliendo poligoni uguali da poligoni uguali: si dice che sono equicompletabili.

Il criterio di equicompletabilità quindi in alcuni casi è più semplice di quello di equiscomponibilità.-
Fortunatamente c'è un teorema che assicura la legittimità di tale criterio, precisamente:
Teorema: Due poligoni sono equicompletabili se e solo se sono equiscomponibili.

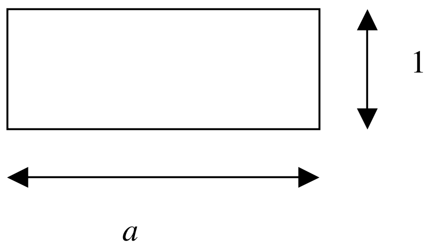
Analogamente a quanto abbiamo fatto per la lunghezza dei segmenti, il passo successivo è quello di **passare dalle aree delle superfici alla loro misura.**
Il primo teorema che abbiamo enunciato ci permette di ricondurre il confronto fra aree e le operazioni di somma / multipli / sottomultipli / rapporto fra aree alle analoghe operazioni fra lunghezze.

Infatti il teorema ci assicura che l'area di un poligono è uguale all'area di un rettangolo che ha un lato di lunghezza arbitraria (cioè che possiamo fissare a nostro piacimento), e l'altro che rimane fissato di conseguenza. A quel punto dati due poligoni qualsiasi P_1 e P_2 possiamo costruire due rettangoli R_1 e R_2 che abbiano la stessa area di P_1 e P_2, e un lato della stessa lunghezza: chiamiamo l la lunghezza di tale lato; l'altro avrà una certa lunghezza l_1 per il rettangolo R_1, e una certa lunghezza l_2 per il rettangolo R_2. A questo punto possiamo *definire* la somma delle aree di R_1 e R_2 (che è uguale alla somma delle aree di P_1 e P_2), come la somma delle lunghezze dei lati l_1 *e* l_2:



Da questa definizione segue che anche la nozione di multiplo / sottomultiplo / rapporto di aree sarà ricondotta alle analoghe nozioni di multiplo / sottomultiplo / rapporto di lunghezze: in particolare il rapporto fra R_1 e R_2 sarà uguale al rapporto fra le lunghezze l_1 e l_2.

Analogamente possiamo definire la **misura dell'area** a partire dalla misura di una lunghezza.
Più precisamente per *definire* la misura dell'area di un poligono P procediamo così: scegliamo un'unità di misura *u* per le lunghezze, e consideriamo il rettangolo R equiscomponibile con P e avente un lato di lunghezza unitaria rispetto all'unità di misura scelta.
L'altro lato avrà una certa lunghezza: chiamiamo *a* la sua misura rispetto ad *u*.



Definiamo allora il numero *a* come la **misura dell'area di P**.

Da come abbiamo dato questa definizione discende che:

1. Le proprietà della misura sono verificate, in quanto possedute dalla misura delle lunghezze.
In particolare:
$m(A+B) = m(A) + m(B)$
$A \leq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$
$m(A)/m(B) = A/B$

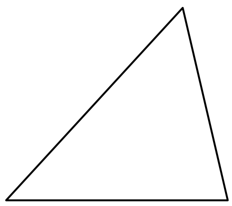
2. L'area del quadrato di lato di lunghezza unitario è 1, e quindi si può vedere come l'unità di misura delle aree.

3. **L'area del rettangolo i cui lati misurano *a* e *b* misura axb.**
Infatti se consideriamo il rettangolo R i cui lati misurano *a* e *b* e lo confrontiamo con il rettangolo A che ha un lato di lunghezza *a* e l'altro di lunghezza 1 otteniamo:
$R/A=b/1=m(R)/m(A)$
Quindi $b=m(R)/m(A)$

Ma m(A)=a per definizione
Da cui:
m(R)=axb

A questo punto – cioè sapendo che l'area del rettangolo i cui lati misurano *a* e *b* misura axb - siamo in grado di dimostrare i risultati ben noti, riguardanti il calcolo della misura:
- dell'area di un triangolo
- dell'area di un parallelogramma
- dell'area di un trapezio
- dell'area di un poligono regolare di n lati.

<u>Esercizio 2.2:</u>
Dimostra che la misura dell'area del triangolo si calcola moltiplicando un lato per l'altezza relativa (base x altezza) e poi dividendo per 2.



<u>Esercizio 2.3:</u>
Scrivi e dimostra la formula per calcolare la misura dell'area del parallelogramma.

<u>Esercizio 2.4:</u>
Scrivi e dimostra la formula per calcolare la misura dell'area del trapezio.

<u>Esercizio 2.5:</u>
Disegna un esagono regolare, e la circonferenza circoscritta.
Scomponi l'esagono in 6 triangoli, aventi ognuno come base un lato dell'esagono, e come terzo vertice il centro della circonferenza.
Come sono questi triangoli?
Come puoi calcolare la misura dell'area dell'esagono?
L'altezza dei triangoli in cui hai scomposto l'esagono si chiama *apotema*.
Come puoi esprimere allora l'area dell'esagono?
Che relazione c'è fra l'apotema e la circonferenza inscritta nell'esagono?

<u>Esercizio 2.6:</u>
Calcola ora la misura dell'area del poligono regolare di 8 lati.

Osservazioni: Anche in questo caso osserviamo che mantenere il controllo del linguaggio ("calcola la misura dell'area" invece che il più semplice ed usato "calcola l'area") è faticoso e tutto sommato non significativo nella pratica didattica.
Il rigore e la precisione del linguaggio in matematica vanno collegati a degli scopi (di comunicazione, di comprensione / risoluzione di problemi, …), altrimenti diventano inutile pedanteria e dal punto di vista didattico sono addirittura controproducenti.
Osserviamo di nuovo anche che sistemare rigorosamente un concetto apparentemente semplice e sicuramente intuitivo come quello di area è piuttosto complesso: ma anche se è bene che l'insegnante di scuola primaria sia consapevole di certi passaggi concettuali importanti, non è necessario che controlli a fondo questa materia, e non è naturalmente il caso – dal punto di vista didattico – che insista su questi aspetti teorici nell'insegnamento. Dal punto di vista didattico,

possiamo invece ripetere per le aree quello che abbiamo detto per le lunghezze: è opportuno proporre ai bambini esperienze con l'area delle superfici prima di parlare della loro misura. Ad esempio si può richiedere:
- di confrontare e ordinare delle superfici (la superficie della Sicilia, dell'Umbria, dell'Isola d'Elba, …)
- di confrontare e ordinare rettangoli con un lato uguale
- di confrontare e ordinare – senza misurarli - i perimetri di due rettangoli
- di dividere in parti uguali delle figure geometriche (un rettangolo, un quadrato, …)

In ogni caso l'operazione di misura non comporta necessariamente il riferimento ad un'unità di misura convenzionale: è opportuno anzi che le prime esperienze dei bambini con il concetto di misura passi attraverso unità di misura più naturali e più legate al contesto in cui si opera (si veda l'esercizio che segue) .

<u>Esercizio 2.7:</u>
Osserva il tangram, riportato a p. 10.
Se assumiamo come unità di misura l'area di uno dei triangoli più piccoli, quanto misurano:
- l'area del quadrato grande
- l'area del quadrato piccolo
- l'area del parallelogramma
- l'area del triangolo medio
- l'area del triangolo grande ?

2.3.2 Area del cerchio

La relazione di equiscomponibilità che abbiamo utilizzato per definire l'area nel caso dei poligoni si rivela inadeguata per definire l'area di altre figure geometriche, ad esempio cerchi, ellissi, sottografici di funzioni.
Succede in questo passaggio qualcosa di analogo a quello che abbiamo visto nel caso della lunghezza nel passaggio dalla lunghezza di un segmento a quella di una linea curva: entrano in gioco processi di approssimazione, di 'passaggio al limite', si devono utilizzare in definitiva strumenti dell'analisi matematica. Ad esempio per definire la lunghezza della circonferenza abbiamo fatto ricorso a successioni di perimetri di poligoni regolari inscritti e circoscritti.
Per definire l'area del cerchio il procedimento è del tutto analogo: si costruisce una successione di aree di poligoni regolari inscritti, ed una di aree di poligoni regolari circoscritti.

Questo procedimento permette anche di *misurare* l'area del cerchio, rispetto all'unità di misura scelta per la lunghezza del raggio.
Si trova la nota formula:
$A = \pi r^2$
Che si può scrivere anche nel modo seguente:
$A = ½ r \cdot 2 \cdot \pi r$
e quindi interpretare come la misura dell'area del triangolo che ha per base un segmento della stessa lunghezza della circonferenza, e per altezza il raggio.

2.4 Il volume di un solido

Finora tutte le nostre considerazioni si sono limitate alle figure piane. Più avanti faremo qualche riflessione sulla 'geometria solida' o 'geometria dello spazio', ma qui – nel contesto delle grandezze geometriche – ci limitiamo ad accennare al concetto di *volume* di un solido.
Nel passaggio dalla lunghezza all'area, abbiamo visto che le cose si sono complicate: se nel caso della lunghezza dei segmenti la relazione di equivalenza che abbiamo utilizzato è stata quella di

‘sovrapponibilità’ (o congruenza), nel caso dell’area tale relazione era inadeguata, anche rimanendo nel caso dei poligoni. Abbiamo definito quindi la relazione di equiscomponibilità.
Nello spazio il corrispondente dei poligoni sono i **poliedri**, la cui definizione è notevolmente più complessa di quella di poligono; senza pretendere di dare una definizione rigorosa potremmo dire che un poliedro è un solido delimitato da un numero finito di facce piane poligonali. Esempi di poliedri sono i prismi (in particolare i parallelepipedi ed i cubi), le piramidi.
Nel passaggio dalla nozione di area a quella di volume le cose si complicano ulteriormente; quello che succede è che la relazione di equiscomponibilità si rivela sufficiente per una classe di poliedri molto ristretta: quella dei **prismi** (poliedri che hanno due facce poligonali congruenti appartenenti a due piani paralleli).

Sui prismi si dimostrano risultati analoghi a quelli dimostrati nel caso dei poligoni:
- la relazione di equiscomponibilità è una relazione d’equivalenza
- si definisce *volume* di un prisma la classe d’equivalenza del prisma in base a tale relazione
- si dimostra che un prisma è equivalente (cioè ha lo stesso volume) di un parallelepipedo con base quadrata, e lato del quadrato scelto a piacere
- si riconduce la misura del volume del prisma alla misura dell’altezza del parallelepipedo di base il quadrato unitario ad esso equivalente.

Per i solidi che non sono prismi, si ricorre a procedimenti analoghi a quelli già visti per la lunghezza della circonferenza e per l’area del cerchio, cioè si costruiscono approssimazioni per difetto e per eccesso, e a partire da quelle si definisce il volume del solido e poi la sua misura.
Questo permette di ricavare le formule note, ad esempio quella per il volume della piramide:

$$V(piramide) = \frac{Area\ di\ base\ x\ Altezza}{3}$$

e della sfera:

$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$ dove r è il raggio della sfera.

2.5 L’ampiezza di un angolo

L’ultima grandezza geometrica di cui ci occupiamo è l’ampiezza di un angolo.
Mentre nel caso dell’area e del volume ci siamo ricondotti alla nozione di lunghezza, nel caso dell’ampiezza dell’angolo dobbiamo ripartire da capo.
Definiamo una relazione fra gli angoli: diciamo che due angoli sono congruenti se sono ‘sovrapponibili’, cioè se immaginando di portare vertice e una semiretta del primo a coincidere con vertice e una semiretta del secondo, anche l’altra semiretta del primo coinciderà con l’altra semiretta del secondo.
Si dimostra che questa relazione è d’equivalenza: si definisce quindi ampiezza di un angolo la sua classe d’equivalenza, cioè si passa al quoziente.
Analogamente a quanto fatto per le lunghezze ecc. si definisce il confronto e la somma[5] fra ampiezze angolari.
Si passa poi a definire la misura di un’ampiezza angolare rispetto ad un’unità di misura. Per le ampiezze angolari ci sono due unità di misura privilegiate: il grado sessagesimale (definito come 1/360 dell’angolo giro), e il radiante (l’angolo che in una circonferenza sottende un arco che ha la stessa lunghezza del raggio).

[5] La somma richiede qualche attenzione, perché nel sommare angoli ci si può trovare a ‘superare’ l’angolo giro.

2.6 Osservazioni conclusive

Sintetizziamo i procedimenti che abbiamo descritto per definire lunghezza / area / volume e la loro misura:

Ente geometrico	Grandezza	Definita come
Segmento	Lunghezza	Classe d'equivalenza dei segmenti congruenti (sovrapponibili)
Circonferenza	Lunghezza	Definita per processi d'approssimazione a partire dai perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti.
Poligoni	Area	Classe d'equivalenza dei poligoni equiscomponibili
Cerchio	Area	Definita per processi d'approssimazione a partire dall'area di poligoni regolari inscritti e circoscritti.
Prismi	Volume	Classe d'equivalenza dei prismi equiscomponibili
Piramidi, sfera, …	Volume	Definita per processi d'approssimazione a partire dal volume di prismi.

Per non appesantire il discorso non abbiamo preso in considerazione nel nostro percorso il caso della lunghezza di curve in generale, e dell'area di superfici curve (ad esempio la superficie della sfera).

Il passo successivo è quello che porta dalla definizione di una grandezza alla definizione di operazioni di confronto e somma fra grandezze, e quindi di rapporto fra grandezze, e poi alla definizione di *misura* rispetto ad un'unità di misura (una grandezza) scelta come riferimento. Se le grandezze sono enti geometrici, le loro misure sono numeri (reali positivi).

Ente geometrico	Grandezza	Misura della grandezza: è un numero
Segmenti	Lunghezza	Misura di una lunghezza rispetto ad una lunghezza scelta come unità di misura. Unità di misura convenzionali: il metro e suoi multipli e sottomultipli secondo potenze di 10.
Superfici	Area	Misura dell'area di una superficie rispetto ad un'area scelta come unità di misura. Unità di misura convenzionali: il metro quadrato (l'area di un quadrato di lato 1 metro) e suoi multipli e sottomultipli secondo potenze di 10.
Solidi	Volume	Misura del volume di un solido rispetto ad un volume scelto come unità di misura. Unità di misura convenzionali: il metro cubo (il volume di un cubo di lato 1 metro) e suoi multipli e sottomultipli secondo potenze di 10.
Angoli	Ampiezza	Misura dell'ampiezza di un angolo rispetto ad un'ampiezza scelta come unità di misura. Unità di misura convenzionali: grado sessagesimale e radiante.

APPENDICE
La geometria nelle Indicazioni per il curricolo

Per la scuola primaria fra i *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria troviamo* i riferimenti alla geometria sono evidenziati in neretto[6]:

L'alunno sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, anche grazie a molte esperienze in contesti significativi, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato siano utili per operare nella realtà.
Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.
Percepisce e rappresenta forme, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo, utilizzando in particolare strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura.
Utilizza rappresentazioni di dati adeguate e le sa utilizzare in situazioni significative
per ricavare informazioni.
Riconosce che gli oggetti possono apparire diversi a seconda dei punti vista.
Descrive e classifica figure in base a caratteristiche geometriche e utilizza modelli concreti di vario tipo anche costruiti o progettati con i suoi compagni.
Affronta i problemi con strategie diverse e si rende conto che in molti casi possono ammettere più soluzioni.
Riesce a risolvere facili problemi (non necessariamente ristretti a un unico ambito) mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati e spiegando a parole il procedimento seguito.
Impara a costruire ragionamenti (se pure non formalizzati) e a sostenere le proprie tesi, grazie ad attività laboratoriali, alla discussione tra pari e alla manipolazione di modelli costruiti con i compagni.
Impara a riconoscere situazioni di incertezza e ne parla con i compagni iniziando a usare le espressioni "è più probabile", "è meno probabile" e, nei casi più semplici, dando una prima quantificazione.

E fra gli Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria il riferimento alla geometria lo troviamo nella parte denominata "Spazio e figure", ma anche "Relazioni, misure, dati e previsioni":

Spazio e figure
– Descrivere e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri.
– Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria).
– Utilizzare il piano cartesiano per localizzare punti.
– Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione.
– Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.
– Riprodurre in scala una figura assegnata (utilizzando ad esempio la carta a quadretti).
– Determinare il perimetro di una figura.
– Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione.
Relazioni, misure, dati e previsioni
(…)
– Conoscere le principali unità di misura per lunghezze, angoli, aree, volumi/capacità, intervalli temporali, masse/pesi e usarle per effettuare misure e stime.
– Passare da un'unità di misura a un'altra, limitatamente alle unità di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario.
(…)
– Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure.

Per la scuola dell'infanzia le nuove indicazioni non riconoscono uno spazio specifico alla matematica (aspetto questo criticato dai matematici), che si trova ad essere 'inserita' soprattutto nell'area "La conoscenza del mondo", ma che trova uno spazio anche all'interno delle altre aree:
- Il sé e l'altro
- Il corpo e il movimento
- Linguaggi, creatività, espressione
- I discorsi e le parole
- La conoscenza del mondo

[6] Non li ho stralciati dal testo perché sono importanti anche per la geometria le indicazioni di carattere trasversale sull'attività di risoluzione di problemi e sull'importanza dello sviluppo di un atteggiamento positivo.