Analisi 3 - Corso di Laurea in Fisica (A.A. 2016/2017)

Prova scritta del 09 Gennaio 2017

11457901235

Cognome:____________________________________
Nome:____

Matricola:____________________________

Esercizio 1 Sia $\Omega = \{(x, y, z) | z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e sia data la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$F(x, y, z) = e^{x^2+y^2} - x \ln z + z^2 - 2$$

1. provare che esistono $\epsilon, \delta > 0$ ed una funzione f di classe C^∞ con

   $$f : B_\epsilon \to (1-\delta, 1+\delta), \quad \text{dove } B_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < \epsilon\}$$

   e tale che $F(x, y, f(x, y)) = 0$ ed $f(0, 0) = 1$;

2. scrivere lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine della funzione $f(x, y)$ nel punto $(0, 0)$;

3. dire se il punto $(0, 0)$ e' punto critico per la funzione f ed in caso affermativo dire se si tratta di max locale, di min locale oppure di punto di sella.

Esercizio 2 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+2y^2} + \frac{1}{1+3z^2}$$

e sia

$$A = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1, z \geq 0\} :$$

1. dire se esistono $\max_A f, \min_A f$;
2. in caso affermativo calcolare $\max_A f, \min_A f$.

Esercizio 3 Dato l'aperto

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 9, \max\{|x|, |y|, |z|\} > 1\}$$

ed il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x^3, y^3, z^3)$ calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_{ext} dS$$

dove $\vec{\nu}_{ext}$ e' la normale esterna a $\partial\Omega$ e $\vec{a} \cdot \vec{b}$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$.

Es. 1

1. Basta osservare che $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0$.

Inoltre essendo $F \in C^\infty$ si ha che $f \in C^\infty$ sempre come conseguenza del teorema della funzione implicita.

2. Sappiamo che $f(0,0)=1$. Inoltre dal teo. della funzione implicita si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)} = 0$

e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)} = 0$.

Quindi il polinomio di Taylor di f in $(0,0)$ di ordine 2 ha la forma

$$p(x,y) = 1 + ax^2 + by^2 + cxy.$$

Per calcolare a, b, c sfruttiamo il fatto che $f(x,y) = p(x,y) + o(x^2+y^2)$ ed inoltre $F(x,y,f(x,y)) = 0$, che implica:

$$0 = e^{x^2+y^2} - x \ln\left(p(x,y) + o(x^2+y^2)\right) + \left(p(x,y) + o(x^2+y^2)\right)^2 - 2$$

ed usando lo sviluppo di $\ln(1+w)$ ed e^w si trova

$$0 = 1 + x^2+y^2 + o(x^2+y^2) - x\left[(ax^2+by^2+cxy) + o(ax^2+by^2+cxy)\right] +$$

$$+ 1 + 2ax^2 + 2by^2 + 2cxy - 2 =$$

$$= (2a+1)x^2 + (2b+1)y^2 + 2cxy + o(x^2+y^2) \implies a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2},\ c = 0.$$

quindi

$$p(x,y) = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2).$$

3. Sappiamo già che $\nabla_{x,y} f(0,0)=0$. Per studiare il carattere del punto critico possiamo ricorrere alla matrice Hessiana di f in $(0,0)$:

$$\mathrm{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è definita negativa e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo locale.

Es. 2 Indichiamo con $\mathring{A}$ e ∂A rispettivamente la parte interna di A e ∂A.

Per studiare i candidati punti di min e max in $\mathring{A}$ imponiamo $\nabla_{x,y,z} f = (0,0,0)$, ossia

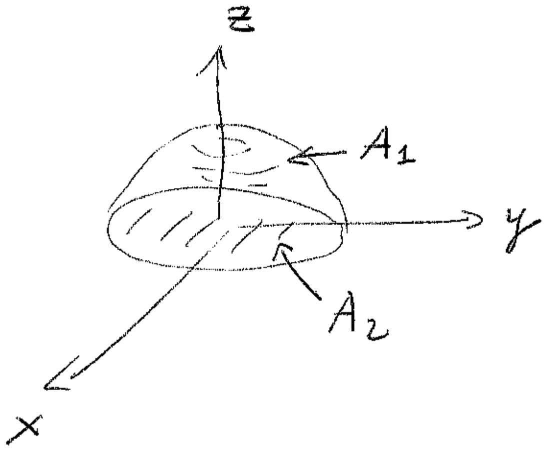
$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0 \quad , \quad \frac{-4y}{(1+2y^2)^2}=0, \quad \frac{-6z}{(1+3z^2)^2}=0$$

$\Longrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$. Siccome $(0,0,0)\notin \mathring{A}$ deduciamo che il max ed il min sono su ∂A.

A tal fine dividiamo ∂A in due parti:

$$\partial A = \{x^2+2y^2+3z^2=1,\ z>0\} \cup \{x^2+2y^2 \le 1,\ z=0\}$$

$$= \quad A_1 \quad \cup \quad A_2$$



Studiamo i candidati punti di Max e Min su A_1 usando i moltiplicatori di Lagrange. Indichiamo da ora in poi $g(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-1$ e osserviamo che il sistema $\nabla_{x,y,z}\, g = (0,0,0)$ ha sol. $(x,y,z)=(0,0,0)$ e siccome $(0,0,0) \notin A_1$ possiamo procedere diret-tamente allo studio del sistema con moltiplicatore λ:

$$\begin{cases} -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 2\lambda x, \\[2mm] -\dfrac{4y}{(1+2y^2)^2} = 4\lambda y, \\[2mm] -\dfrac{6z}{(1+3z^2)^2} = 6\lambda z, \\ x^2+2y^2+3z^2 = 1, \\ z>0 \end{cases}$$

Distinguiamo di seguito 2 casi:

<u>1° caso</u> $x \neq 0$, ed $y \neq 0$.

In tal caso, siccome necessariamente dal sistema si vede che $z > 0$, si ha $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ quindi le prime tre eq. del sistema implicano:

$$\lambda = -\frac{1}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{(1+2y^2)^2} = -\frac{1}{(1+3z^2)^2}.$$

Da ciò si deduce facilmente che

$x^2 = 2y^2 = 3z^2$ e quindi dalla quarta eq. del sistema:

$x^2 = \frac{1}{3}$, $y^2 = \frac{1}{6}$, $z^2 = \frac{1}{9}$ e siccome $z > 0$ (dal sistema)

si trovano i punti:

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3}\right)$$ e quindi $$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{9}{4}}.$$

<u>2° caso</u> $x = 0$, $y = 0$.

In tal caso troviamo dalla quinta eq. del sistema

$z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

e quindi abbiamo il punto

$(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e quindi $f(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \boxed{\frac{1}{2}}$.

<u>3° caso</u> $x = 0$ ed $y \neq 0$.

Siccome dal sistema $z > 0$ possiamo dedurre dalla seconda e terza equazione

$$\lambda = -\frac{1}{(1+2y^2)^2} = -\frac{1}{(1+3z^2)^2} \quad \text{e quindi}$$

$2y^2 = 3z^2$. Siccome $x = 0$ deduciamo

dalla quinta eq. del sistema

$4y^2 = 1$ e $6z^2 = 1$ quindi (siccome $z > 0$)

troviamo i punti

$(0, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ e $f(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

<u>4° caso</u> $x \neq 0$, ed $y = 0$.

Ragionando come nel 3° caso si trovano i punti

$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}})$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{6}} =$

$$= \frac{4}{3} + 1 = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

Quindi abbiamo trovato su A_1 i seguenti candidati punti di max e min:

$$\frac{9}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{3}$$ e quindi il candidato min è $\boxed{\frac{1}{2}}$ e il candidato max è $\boxed{\frac{7}{3}}$.

Studio dei candidati max e min su A_2.

Osserviamo che su A_2 siamo ricondotti a studiare:

$$\max_{\{x^2+2y^2\leq 1\}} \left(1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right) \quad e \quad \min_{\{x^2+2y^2\leq 1\}} \left(1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right).$$

Per semplicità chiameremo $h(x,y) = 1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+2y^2}$

ed $\ell(x,y) = x^2+2y^2-1$.

Detto $B = \{x^2+2y^2\leq 1\}$ abbiamo

$B = \mathring{B} \cup \partial B$ dove $\mathring{B} = \{x^2+2y^2<1\}$,

$\partial B = \{x^2+2y^2=1\}$.

Per studiare i candidati punti di Max e Min su $\mathring{B}$ abbiamo da imporre

$\nabla_{x,y} h = (0,0) \iff (x,y)=(0,0)$. Quindi tra i candidati punti di Max e Min abbiamo

$(0,0)$ e quindi $h(0,0) = 1+1+1 = \boxed{3}$.

Resta da capire $\underset{\partial B}{\mathrm{Max}}\, h$ e $\underset{\partial B}{\mathrm{Min}}\, h$.

Siccome $\partial B = \{x^2+2y^2=1\}$ possiamo riutilizzare i moltiplicatori di Lagrange e ricordando che abbiamo posto $\ell(x,y) = x^2+2y^2-1$ ed

$$h(x,y) = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+2y^2}.$$

È facile vedere che il sistema $\nabla_{x,y}\,\ell = 0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ e quindi non ne teniamo conto visto che $(0,0) \notin \partial B$.

Risolviamo quindi il sistema dato dal moltiplicatore di Lagrange λ:

$$\begin{cases} -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 2\lambda x, \\[2ex] -\dfrac{4y}{(1+2y^2)^2} = 4\lambda y, \\[2ex] x^2+2y^2-1=0. \end{cases}$$

Consideriamo ora 3 casi (osserviamo che la coppia $x=0=y$ non è compatibile con la terza eq. del sistema).

<u>1° caso</u> $x \neq 0$ e $y \neq 0$

In tal caso la prima e la seconda eq. implica

$$\lambda = -\frac{1}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{(1+2y^2)^2} \Longrightarrow x^2 = 2y^2$$ e quindi

dalla terza eq.

$2x^2 = 1$ e $4y^2 = 1$ ossia

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$ e quindi $h\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

$= 1 + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}$.

<u>2° caso</u> $x = 0$ e $y \neq 0$.

Allora necessariamente dalla terza equazione:

$2y^2 = 1$ e quindi troviamo i punti

$\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e quindi $h\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$

<u>3° caso</u> $x \neq 0$ e $y = 0$

Allora necessariamente dalla terza eq. $x^2 = 1$

e quindi $(\pm 1, 0)$ e quindi $h(\pm 1, 0) = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$.

Procedendo ad un confronto tra i candidati max e min su A_2 si trova che i candidati max e min sono il più grande e il più piccolo tra $3, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}$ e quindi

$\boxed{\frac{7}{3}}$ e $\boxed{3}$. Confrontando con i valori $\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{3}$ trovati sopra studiando A_1 abbiamo $\max_A f = \boxed{3}$ e $\min_A f = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Es. 3 Osserviamo che detta B_3 la palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 3 e detto $Q_1 = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ abbiamo $\Omega = B_3 \setminus Q_1$.

Usando inoltre il teorema della divergenza siamo ricondotti a studiare

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_{B_3\setminus Q_1} 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Per calcolare questo integrale osserviamo che

$$3\iiint_{B_3\setminus Q_1} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_{B_3} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz - 3\iiint_{Q_1}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

e calcoliamo separatamente $\iiint_{B_3}$ e $\iiint_{Q_1}$:

$$\iiint_{B_3}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \rho^4 \sin\varphi \,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{3^5}{5}\cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{3^5\cdot 4\pi}{5};$$

$$\iiint_{Q_1}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_{Q_1} x^2\,dx\,dy\,dz = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\cdot 4 =$$

$$= 12\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right] = 8$$

Quindi l'integrale cercato vale:

$$\boxed{\frac{3^5\cdot\cancel{2}\,4\pi}{5} - \cancel{2}\,8}$$