ALGEBRA LINEARE

PARTE A

1. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ definito come segue $W = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Allora $dimW$ vale

   A: N.A. B: 3 C: 1 D: 2 E: 4

2. Il seguente sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w = 0 \\ 2y + z + w = 0 \\ 10z + w = 0 \\ 20z + 2w = 2 \end{cases}$$
   gode della seguente proprieta'

   A: ha infinite sol. B: ha esattamente 2 sol. C: N.A. D: non ha sol. E: ha unica sol.

3. Sia dato un endomorfismo $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $L(e_1 + e_2) = e_1 + e_2, L(e_1 - e_2) = e_1 - e_2, L(e_3) = e_3$, (dove e_1, e_2, e_3 base canonica di $\mathbb{R}^3$). Allora $dim(ImL)$ vale

   A: 3 B: 0 C: 2 D: N.A. E: 1

4. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo tale che $L(e_1) = e_1 + 2e_2$, $L(e_1 - e_2) = e_1$ (dove e_1, e_2 e' la base canconica di $\mathbb{R}^2$). Gli autovalori di L sono:

   A: $(0, 1)$ B: N.A. C: $(1, 1)$ D: $(-1, 1)$ E: $(1, 2)$

5. Sia $\mathcal{B} = \{1, 1 + x + x^2, x^2\}$ una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (polinomi della varabile x di grado minore uguale di 2). Allora il polinomio $1+2x+3x^2$ ha le seguenti componenti (coordinate) rispetto alla base $\mathcal{B}$:

   A: $(1, 2, -3)$ B: $(1, 2, 3)$ C: $(1, -2, -3)$ D: N.A. E: $(-1, 2, 1)$

6. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ (dove $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ indica lo spazio dei polinomi di una variabile di grado minore uguale di 1) l' endomorfismo cosi' definito: $Lp(x) = p(2x + 1)$. Allora gli autovalori di L sono:

   A: N.A. B: $(1, 2)$ C: $(1, 1)$ D: $(0, 1)$ E: $(2, 2)$

7. Le componenti (coordinate) del vettore $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ di $\mathbb{R}^3$ sono:

   A: $(-1, 1, 1)$ B: N.A. C: $(1/2, 3, 1/2)$ D: $(1, 2, 3)$ E: $(1/2, 1/2, 1/2)$

8. Gli autovalori della seguente matrice $\begin{bmatrix}1&3&7\\0&3&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ sono

   A: N.A. B: $(-1, 0, 1)$ C: $(1, 2, 3)$ D: $(2, 3, 4)$ E: $(0, 2, 3)$

9. Siano date le matrici $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&3\\0&0&1\end{bmatrix}$. Allora $det(A \cdot B)$ vale

   A: 2 B: -2 C: 1 D: N.A. E: -1

10. La matrice simmetrica $\begin{bmatrix}-2&2\\2&-4\end{bmatrix}$ gode della seguente proprieta':

    A: e' definita neg. B: $detA = 0$ C: e' definita pos. D: N.A. E: e' indefinita

CODICE=041732

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

5 Febbraio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	●	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	●	○	○
9	●	○	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=041732

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 5 Febbraio 2018

Cognome:_______________________________________ ,
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1
Date tre matrici $A \in Mat(n \times n)$, $B \in Mat(k \times k)$, $C \in Mat(k \times n)$ considerare la matrice quadrate

$$D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \in Mat((n+k) \times (n+k))$$

dove $0 \in Mat(n \times k)$ indica la matrice nulla. Provare che $detD = detA \cdot detB$.

Esercizio 2
Siano dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 | 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, 3x_3 - \frac{5}{2}x_4 = 0\}$$

$$V = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 | 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Calcolare $dim(V + W)$ e $dim(V \cap W)$.

Esercizio 3
Sia data la matrice

$$A_h = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & h \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di h la matrice risulta invertibile. Per tali valori di h scrivere la matrice inversa A_h^{-1}

SOLUZIONI

ES. 1 Sviluppando lungo la prima riga si trova

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(D_j) = \det(D)$$ dove

$$D_j = \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ C_j & B \end{pmatrix}$$

e $A_j \in Mat\,(n-1)\times(n-1)$ è A cui ho tolto prima riga e j-esima colonna e $C_j \in Mat\big((k+1),(n-1)\big)$ è C cui ho tolto la j-esima colonna

Se usiamo l'induzione allora siccome ~~$D_j \in Mat\big((n-1)\times(n-1)\big)$~~ $D_j \in Mat\,(n+k-1,\ n+k-1)$ si trova

$$\det D_j = \det A_j \cdot \det B .$$

Pertanto

$$\det D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_j) = \det(B) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} (\det A_j)$$

$= \det B \cdot \det A$ dove all'ultimo passaggio ho usato di nuovo lo sviluppo lungo la prima riga per calcolare $\det A$.

Es. 2

Osserviamo che

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + x_4 \\ \frac{\pi}{6} \cdot x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\pi}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

È facile vedere che $\dim V = 3$ poiché

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \left(\text{infatti contiene il minore } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

e $\dim W = 2$ poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\pi}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono paralleli.

Calcoliamo ora

$$\dim (V+W) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\frac{5}{6}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Osserviamo che $\dim (V+W) \leq 4$ ed inoltre

$\dim (V+W) \geq 3$ poiché V ha dim 3.

Per capire $\dim (V+W)$ studiamo

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il det del minore fatto dalle prime 4 colonne

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= 0}$$

$$= -4 \neq 0 \Rightarrow \dim (V+W) = 4.$$

Quindi $\dim (V+W) = 4$ e da Grassmann

$$\dim (V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim (V+W) = 3+2-4 = 1$$

(3) Calcoliamo $\det A_h$ usando Sarrus:

$$\det A_h = 2h^2 - h^2 - 2 = h^2 - 2$$

quindi A_h è invertibile $\Longleftrightarrow h \neq \pm\sqrt{2}$.

Per calcolare l'inversa calcoliamo la matrice dei cofattori:

$$\mathrm{cof}(A_h) = \begin{pmatrix} h & -2 & 1 \\ -2 & 2h & -h \\ h & -2h^2 & h^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_h^{-1} = \frac{1}{(h^2-2)} \begin{pmatrix} h & -2 & h \\ -2 & 2h & -2h^2 \\ 1 & -h & h^2-1 \end{pmatrix}$$

ANALISI II

PARTE A

1. Il seguente integrale $\int_\Omega xy dx dy$ dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 1, 0 < y < \sqrt{3}x, x > 0\}$ vale:

   A: π B: N.A. C: $\frac{1}{2}$ D: $\frac{3}{32}$ E: 2

2. Il volume di Ω dove $\Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le x^2 + y^2\}$ vale

   A: π B: N.A. C: $\frac{1}{2}\pi$ D: $\frac{1}{3}\pi$ E: $\frac{1}{4}\pi$

3. L' area di Ω dove
$$\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 4, y > \pi x\}$$
   vale:

   A: 3π B: N.A. C: 2π D: 4π E: π

4. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x+y)-1}{x^2+y^2}$ vale

   A: -1 B: 1 C: 0 D: N.E. E: N.A.

5. Sia data la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   Allora il gradiente di f in $(0,0)$ vale:

   A: $(0,0)$ B: N.A. C: $(1,0)$ D: $(0,1)$ E: N.E.

6. Il gradiente della funzione $f(x,y) = ||x| + |y|^3|$ nel punto $(0,0)$ vale

   A: $(0,0)$ B: N.E. C: $(1,0)$ D: $(0,1)$ E: N.A.

7. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)-(x+y)}{x^3+y^3}$ vale

   A: N.A. B: -1 C: N.E. D: 0 E: 1

8. Il volume di Ω dove $\Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x + y + z > 0\}$ vale

   A: π B: $\frac{1}{3}\pi$ C: N.A. D: $\frac{4}{3}\pi$ E: $\frac{2}{3}\pi$

9. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln(1 + |-\cos(xy) + 1|)$, allora il punto $(0,0)$ e' un punto di

   A: N.A. B: max assoluto C: min relativo ma non min assoluto D: sella E: min assoluto

10. Il seguente integrale $\int\int_\Omega x^2 dx dy$ dove
$$\Omega = \{(x,y) | \max\{|x|,|y|\} \le 1, |x| < |y|, x \cdot y > 0\}$$
   vale

   A: 1 B: $\frac{1}{6}$ C: $\frac{1}{4}$ D: N.A. E: 2

CODICE=346591

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

5 Febbraio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	●	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	●	○	○	○

CODICE=346591

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 5 Febbraio 2018

Cognome:___________________________________ ,
Nome:____

Matricola:_______________________________

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione risulta continua. Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione risulta differenziabile.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_\Omega \frac{\sin(y^2)}{y} dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < y^2, 0 < y < \sqrt{\pi}\}$

Esercizio 3

Calcolare l'area di Σ dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) | x^2 - y^2 - z^2 = 0\} \cap \{(x,y,z) | x^2 + y^2 \leq 1, y^2 \leq \frac{1}{3}x^2\}.$$

Es. 1 La funzione è ovviamente continua fuori da $(0,0)$ (poiché ottenuta tramite operazioni elementari a partire da funzioni continue e con il denominatore non nullo se $(x,y) \neq (0,0)$. Per il teo. del diff totale risulta diff. in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Resta quindi solo da studiare cont. e diff. in $(0,0)$.

Siccome
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\downarrow\, 0}$$
$$= 0$$

abbiamo f cont. anche in $(0,0)$.

Per la diff. in $(0,0)$ vediamo se esistono le derivate parziali: la restrizione sull'asse $y=0$ corrisponde ad

$$x \xrightarrow{\tilde{f}} \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{\sqrt{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

e questa funzione non è deriv. in 0 perché
$$1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x\sqrt{|x|^2}} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x\sqrt{x^2}} = -1.$$
Quindi non è diff in $(0,0)$

Es. 2 Si ha

$$\iint_\Omega \frac{\operatorname{sen}(y^2)}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_0^{y^2} \frac{\operatorname{sen}(y^2)}{y}\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} y \operatorname{sen}(y^2) = -\frac{1}{2}\left[\cos(y^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Es. 3 Osserviamo che

$$\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$$

dove

$$\Sigma_\pm = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1,\ y^2 \cancel{\ge} \frac{1}{3}x^2,\ z = \pm\sqrt{x^2-y^2} \right\}$$

Per simmetria si ha

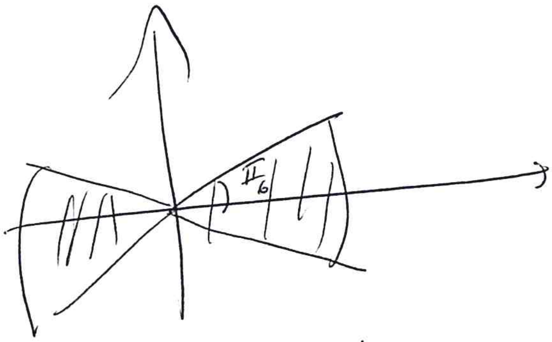
$$\text{Area}(\Sigma) = 2\,\text{Area}(\Sigma_+) =$$

$$= 2\iint_\Omega \sqrt{1+\left(\partial_x\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)\right)^2 + \left(\partial_y\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1,\ y^2 \le \frac{1}{3}x^2 \right\}$

~~Ora~~

ossia

$\Omega =$ 

Continuando il calcolo troviamo

$$2\sqrt{2}\iint_{\Omega}\sqrt{\frac{y^2}{x^2-y^2}}$$

che per simmetria è

usando le polari si riduce a

$$\cancel{8\sqrt{2}\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}}$$

$$2\sqrt{2}\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta-1}}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta-1}}\overset{-\cos\theta=t}{=}\sqrt{2}\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}=\left[\ln|s+\sqrt{s^2-1}|\right]_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}=\dots$$