PER VISIONARE GLI SCRITTI
E PER VERBALIZZARE
IL VOTO PRESENTARSI IL
GIORNO 1 AGOSTO 2016
ORE 9.00 PRESSO LO STUDIO
210 AL DIP. DI MATEMATICA

VOTI ANALISI 2 APPELLO DEL 28 LUGLIO 2016

1)	533461	18
2)	522627	23
3)	482388	8
4)	509823	18
5)	530592	26
6)	524120	26
7)	509267	18
8)	466851	29
9)	531929	18
10)	532269	5
11)	508775	28
12)	530341	23
13)	483183	11

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

28 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=901601

PARTE A

1. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)-xy}{x^2+y^2}$ vale:

   A: 0 B: N.A. C: $\frac{1}{3}$ D: $N.E.$ E: $\frac{1}{2}$

2. L' integrale seguente $\int\int_A y\,dxdy$ dove

$$A = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \leq 1, y+x \geq 1\}$$

   vale:

   A: 2 B: $\frac{1}{6}$ C: $\frac{1}{3}$ D: 1 E: N.A.

3. Il flusso del campo $\vec{F} = (e^{x+y}, -e^{x+y}, z)$, lungo il bordo d~~ella superfic~~ie di Ω con

$$\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\}$$

   orientata secondo la normale esterna, vale:

   A: $\pi\frac{13}{25}$ B: 4π C: $\pi\frac{12}{23}$ D: N.A. E: $\pi\frac{11}{24}$

4. L' integrale

$$\int\int_A \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

   dove $A = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1, x \cdot y \geq 0\}$ vale

   A: $\frac{\pi}{8}(1-\ln 2)$ B: $\frac{\pi}{4}(1-\ln 2)e$ C: $\pi(1-\ln 2)$ D: N.A. E: $\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$

5. L' area della superficie paramterizzata come segue

$$\{u^2+v^2 \leq 1\} \ni (u,v) \to (u,v,uv)$$

   vale:

   A: $\pi(2^{1/3}-1)$ B: $\frac{2}{3}\pi(2^{3/2}-1)$ C: $\frac{\pi}{2}$ D: $\pi(4^{1/3}-1)$ E: N.A.

6. La seguente derivata

$$\frac{\partial^6}{\partial^3 x \partial^3 y} f(0,0),$$

   dove $f(x,y) = e^{\sin(xy)}$ vale:

   A: 0 B: 1 C: $\frac{1}{6}$ D: N.A. E: 2

7. Consideriamo $f(x,y) = \sqrt{|x|^3+|y|^3}$. Allora il gradiente di f nel punto $(0,0)$ vale:

   A: N.A. B: $(0,0)$ C: $(1,0)$ D: N.E. E: $(0,1)$

8. Il seguente integrale $\int\int\int_A xyze^{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ dove $A = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ vale:

   A: e^3-1 B: $\frac{1}{27}(e-1)^3$ C: $\frac{1}{16}(e-1)^3$ D: N.A. E: $\frac{1}{8}(e-1)^3$

9. Dato nel piano (x,z) il triangolo T di vertici $(0,0),(0,1),(1,0)$ sia A il solido ottenuto dalla rotazione di T introno all' asse z. Il volume di A vale:

   A: N.A. B: $\frac{\pi}{3}$

   C: $\frac{\pi}{4}$ D: π E: $\frac{\pi}{2}$

10. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ vale:

    A: -1 B: N.A. C: $\frac{1}{2}$ D: 1 E: $N.E.$

CODICE=901601

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

28 luglio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=901601

Es. 1 Calcolare $\underset{A}{\mathrm{Min}}\, f$ e $\underset{A}{\mathrm{Max}}\, f$

dove $f(x,y,z) = x^2 y^2 z$.

$$A = \{ (x,y,z) \mid x^2 = z,\ x^2+y^2 = 1 \}.$$

Es. 2 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(e^{x-y},\ e^{x-y},\ z\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

lungo il bordo $\partial\Omega$ orientato secondo la normale esterna dove

$$\Omega = \{ (x,y,z) \mid z^2 \geq x^2+y^2,\ z \geq 0,\ z \leq 1-x^2-y^2 \}.$$

Es. 3 Calcolare il volume della regione

$$A = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 2,\ z \geq 0,\ z^2-(x^2+y^2)z+\frac{(x^2+y^2)^4}{4} \leq 1 \right\}$$

SOLUZIONI

Es. 1 Usiamo i doppi moltiplicatori di Lagrange:

1) $2xy^2z = 2\lambda x + 2\mu x$

2) $2x^2yz = 2\mu y$

3) $x^2y^2 = -\lambda$

4) $z = x^2$

5) $x^2+y^2 = 1$

Abbiamo che

(1) e $(3) \implies \lambda x^2 + \mu x^2 = -\lambda z$

(2) e $(3) \implies \mu y^2 = -\lambda z$

quindi poniamo

(6) $\lambda x^2 + \mu x^2 = -\lambda z$

(7) $\mu y^2 = -\lambda z$.

Osserviamo che

(6) e $(4) \implies \lambda x^2 + \mu x^2 = -\lambda x^2 \implies (2\lambda+\mu)x^2 = 0 \begin{cases} x=0 \\ 2\lambda+\mu=0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Caso 1: } x=0}$

Allora $(4) \implies z=0$ e $(5) \implies y^2=1$ quindi troviamo le sol. $\boxed{(x,y,z)=(0,\pm 1,0)}$

$\boxed{\text{Caso 2: } 2\lambda+\mu=0}$

Allora (4), (7) e $(5) \implies -2\lambda y^2 = -\lambda z = -\lambda x^2 = -\lambda + \lambda y^2$

$\implies 3\lambda y^2 = \lambda \begin{cases} \lambda = 0 \\ y^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\boxed{\text{Sottocaso } y^2 = \frac{1}{3}}$

allora $\quad (5) \Longrightarrow x^2 = \frac{2}{3}$

$\qquad\quad (4) \Longrightarrow z = \frac{2}{3}$

quindi trovo le soluzioni

$$\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3} \right)$$

$\boxed{\text{Sottocaso } \lambda = 0}$

Allora per (3) abbiamo $x^2 \cdot y^2 = 0$

Per cui si ha $\quad x^2 = 0 \Longrightarrow y^2 = 1$ e $z = 0$

$\qquad\qquad\qquad y^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1$ e $z = 1$

ossia troviamo le sol.

$$(0, \pm 1, 0)$$

$$(\pm 1, 0, 1)$$

É ora facile concludere che

$$\min_{A} f = 0 \quad \text{e} \quad \max_{A} f = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

Es. 2 Usando il teorema della divergenza ci riduciamo a

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz$$

Calcoliamo l'ultimo integrale in coordinate cilindriche:

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \int_{A_z} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy$$

dove

$A_z = \{ x^2+y^2 \le z^2 \}$ se $z \in [0, z_0]$

$A_z = \{ x^2+y^2 \le 1-z \}$ se $z \in [z_0, 1]$

dove $z_0 \geq 0$ è tale che $1 - z_0 = z_0^2$

ossia $\boxed{z_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Quindi usando ora le polari per calcolare

$$\int_{A_z} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy$$

troviamo

$$2\pi \int_0^{z_0} dz \int_0^{z} \rho^2 d\rho + 2\pi \int_{z_0}^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z}} \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{z_0} \frac{z^3}{3}\, dz + 2\pi \int_{z_0}^1 \frac{(\sqrt{1-z})^3}{3}\, dz$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 4} \pi z_0^4 - 2\pi \cdot \frac{2}{5} \left[(1-z)^{5/2} \right]_{z_0}^1 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^4 + \frac{4\pi}{5} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{5}{2}}.$$

Es. 3 L'insieme che ci interessa si può descrivere come segue

$$A = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 2,\ z \geq 0,\ \left(z - \frac{x^2+y^2}{2} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

che a sua volta equivale a

$$A = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 2,\ z \geq 0,\ -1 + \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq 1 + \frac{x^2+y^2}{2} \right\}$$

ossia

$$A = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1 + \frac{x^2+y^2}{2} \right\}.$$

Integrando ora per fili troviamo

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 2\}} dx\,dy \int_0^{1+\frac{x^2+y^2}{2}} dz = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 2\}} \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2} \right) dx\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\rho^2}{2} \right) \rho \, d\rho = 2\pi \left(1 + \frac{1}{6} (\sqrt{2})^3 \right) =$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{3} (\sqrt{2})^3.$$