COMPITO DI ANALISI II DEL 12/01/2024
INGEGNERIA CIVILE

1) Calcolare esplicitamente la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t+t^2}{2e^{2y}+6e^y} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Dire inoltre se l'insieme massimale di esistenza è un intervallo limitato, una semiretta, oppure tutta la retta reale.

2) Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$$

e studiarne la natura

3) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_E x(1-y)\,dx\,dy\,dz$$

dove $E = \{(x,y,z) \mid -1 \le y \le 0,\ 0 \le z \le 1-x^2\}$

SOLUZIONI

1) L'equazione è a variabili separate, quindi possiamo usare la formula risolutiva:

$$\int_0^{y(t)} (2e^{2s} + 6e^{s})\,ds = \int_0^t (s+s^2)\,ds$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2y(t)} - 1 + 6e^{y(t)} - 6 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2y(t)} + 6e^{y(t)} - 7 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} = 0$$

Per ricavare $y(t)$ osserviamo che se poniamo $z(t) = e^{y(t)}$ allora $z^2 + 6z - \left(7 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right) = 0$ ossia

$z = -3 \pm \sqrt{9 + 7 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}}$. Essendo $z = e^y > 0$ scegliamo il segno $+$ e quindi $e^{y(t)} = -3 + \sqrt{16 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}}$ da cui

$$y(t) = \ln\left(-3 + \sqrt{16 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}}\right).$$

Da tale espressione si vede che l'insieme di def. di tale funzione impone: $16+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}>0$ e

$\sqrt{16+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}}>3$. Dallo studio della funzione $16+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$ si vede che la prima condizione impone t appartiene ad una semiretta, invece la seconda condizione impone $\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+7>0$ e anche questa condizione impone che t sta su una semiretta. Quindi l'intervallo massimale di def. è una semiretta, essendo intersezione di due semirette.

2) I punti critici di $f(x,y)$ sono le coppie (x,y) che risolvono il sistema

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2y^2(3-4x-3y) = 0 \\ x^3y(2-2x-3y) = 0 \end{cases}$$

quindi le sol. sono $(x,0)$, $(0,y)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

Per studiarne la natura scriviamo la matrice Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}$$

da cui

$$H_f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3 - 2x^4 \end{pmatrix}, \quad H_f(0,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

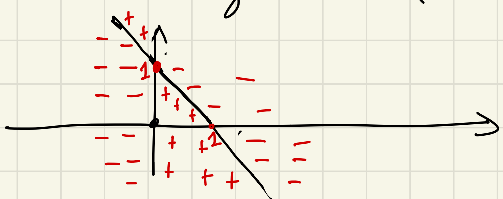
$$H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

quindi per il test dell'hessiana $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ è un punto di max loc.
avendo l'hessiana det >0 e tr <0.

Il test dell'hessiana è invece inutilizzabile nei punti $(x,0),(0,y)$ poiché il determinante è nullo. Per studiare tali punti procediamo in modo alternativo:

$f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$ ed inoltre $f(x,0) = f(0,y) = 0$,
quindi bisogna studiare il segno di f per capire la natura dei punti $(0,y)$ e $(x,0)$.

Osserviamo che il segno di f è dato dal prodotto tra segno di x e segno di $(1-x-y)$ e quindi si ha:



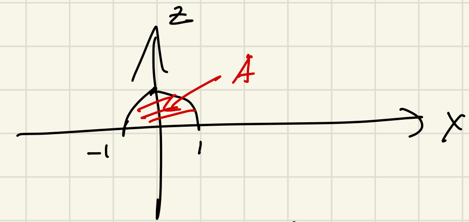
e quindi facile vedere che i punti $(x,0)$ con $x>1$ e $x<0$ sono di max loc.
$(x,0)$ con $x \in (0,1)$ sono di min loc., i punti $(1,0)$, $(0,0)$ sono di selle.

Invece i punti $(0,y)$ sono tutti di selle.

3) Ragionando per sezioni si ha:

$$\iiint_E x(1-y)\,dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dz \left(\int_{-1}^{0} x(1-y)\,dy\right) \text{ dove}$$

$$A = \{(x,z) \mid 0 \le z \le 1-x^2\}$$



da cui

$$\iint_A dx\,dz \left[xy - \frac{xy^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=0} = \iint_A -x+\frac{x}{2}\,dx\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} \left(-\frac{x}{2}\right) dz = \int_{-1}^{1} -\frac{x}{2}(1-x^2)\,dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{1} = 0.$$