Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

3 Luglio 2017

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=407843

PARTE A

1. L' integrale $\int\int_\Omega \ln(xy)dxdy$ dove

$$\Omega = \{(x,y)|\max\{x,y\} < 2, \min\{x,y\} > 1\}$$

vale:

A: $-2+4\ln 2$ B: N.A. C: $2+2\ln 2$ D: $2+4\ln 2$ E: $-4+4\ln 2$

2. L' area della regione piana

$$\Omega = \{(x,y)| -1 < x < 1, |x| > y^2\}$$

vale

A: $\frac{16}{3}$ B: N.A. C: $\frac{4}{3}$ D: $\frac{2}{3}$ E: $\frac{8}{3}$

3. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-\sin^3 y}{x^2+y^2}$ vale

A: 1 B: -1 C: N.E. D: N.A. E: 0

4. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5-y^4}{|x|^2+|y|} \ln(\frac{1}{x^2+y^2})$ vale:

A: -1 B: $\frac{1}{2}$ C: N.A. D: 0 E: 1

5. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln(1+\sin(xy)+|\sin(xy)|)$. Allora il punto $(x,y) = (0,\frac{\pi}{2})$ e':

A: N.A. B: min assoluto C: max relativo D: sella E: min relativo ma non min assoluto

6. Il volume della regione ottenuta ruotando

$$\Omega = \{(x,z)|\min\{x,z\} > 0, \max\{x,z\} < 1, z > x\}$$

intorno all' asse z vale

A: N.A. B: $\frac{\pi}{2}$ C: π D: $\frac{\pi}{4}$ E: $\frac{\pi}{3}$

7. Il gradiente della funzione $f(x,y) = (|\cos x|^2 + |y|^6)^{\frac{1}{2}}$ nel punto $(0,0)$ vale

A: $(0,0)$

B: N.E. C: $(1,0)$ D: $(2,0)$ E: N.A.

8. Il gradiente della funzione $f(x,y) = |x^2+\sin(|x||y|)|$ nel punto $(0,0)$ vale

A: $(1,0)$ B: $(0,1)$ C: N.E. D: N.A. E: $(0,0)$

9. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-\sin^2 y}{|x|+y^2}$ vale

A: N.A. B: 0 C: N.E. D: -1 E: 1

10. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin(1-\cos(x+y))$, allora $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0)$ vale

A: 1 B: -2 C: 2 D: -1 E: N.A.

CODICE=407843

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

3 Luglio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=407843

SCRITTO DEL 3 LUGLIO 2017
ANALISI 2 BIOMEDICA

(1) Calcolare l'area della superficie

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=z^2,\quad z \in [0,1]\}$$

(2) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_D (x+3y+z)\, dx\, dy\, dz$$

con $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+\frac{z^2}{4} \leq 1,\quad z \geq 0\}$

(3) Calcolare Max e Min assoluti della funzione $f(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2}$ sull'insieme

$$\{(x,y,z) \mid (x-1)^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

Es. 1 Si tratta di una superficie cartesiana grafico della funzione $\sqrt{x^2+y^2}$, quindi

$$\{x^2+y^2 \le 1\} \ni (x,y) \xrightarrow{\varphi} (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$$

quindi

$$\text{Area}(S) = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{2}\, dx\,dy = \boxed{\sqrt{2}\,\pi}.$$

Es. 2 Usando l'integrazione per sezioni

$$\iiint_D (x+3y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dz \int_{A_z} (x+3y+z)\,dx\,dy$$

con $A_z = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1-\frac{z^2}{4}\}$ e quindi, siccome per simmetria

$$\iint_{A_z} x\,dx\,dy = 0 = \iint_{A_z} 3y\,dx\,dy$$

troviamo

$$\iiint_D (x+3y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 z\,\pi\cdot\left(1-\frac{z^2}{4}\right)dz$$

$$= \boxed{\pi}.$$

Es3 Prima cerchiamo i punti interni su cui si annulla ∇f, e siccome $\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{1+z^2} > 0$ troviamo l'insieme vuoto.

Ci concentriamo quindi sulla frontiera ed usiamo i moltiplicatori di Lagrange.

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda(x-1) \\ \sqrt{1+z^2} = 2\lambda y \\ \frac{yz}{\sqrt{1+z^2}} = 2\lambda z \\ (x-1)^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

La prima eq. implica
- $\lambda = 0 \to$ incompatibile con eq. seconda
- $x = 1$

Resta quindi il caso $\boxed{x=1}$ $\lambda \neq 0$

Quindi

$$\begin{cases} \sqrt{1+z^2} = 2\lambda y \\ \frac{yz}{\sqrt{1+z^2}} = 2\lambda z \\ y^2+z^2 = 1 \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\lambda y = \sqrt{1+z^2} \\ z = 0 \text{ oppure } 2\lambda = \frac{y}{\sqrt{1+z^2}} \\ y^2+z^2 = 1 \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Se scegliamo $\boxed{z=0} \Longrightarrow \boxed{y=\pm 2}$

Se $z \neq 0$ e $2\lambda = \dfrac{y}{\sqrt{1+z^2}} \overset{1^a\,eq.}{\Longrightarrow} \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{y} = \dfrac{y}{\sqrt{1+z^2}}$

$$\Longrightarrow 1+z^2 = y^2 \Longrightarrow 1+z^2 = 4-z^2 \Longrightarrow z^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

Per cui troviamo i punti:

$(1, \pm 2, 0)$, $\left(1, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

e con un banale confronto si trova

$$\operatorname{Max} f = f\left(1, \sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \boxed{\frac{5}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{Min} f = f\left(1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \boxed{-\frac{5}{2}}$$