PARTE A

1. Sia data la funzione $f(x, y) = \sin(x + y + \sqrt{x^4 + y^4})$ allora il gradiente di f in $(0, 0)$ vale

   A: N.E. B: N.A. C: $(0, 0)$ D: $(1, 1)$ E: $(0, 1)$

2. Sia
$$\Omega = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z > 0\}$$
   allora $vol(\Omega)$ vale

   A: $\frac{4\pi}{3}$ B: N.A. C: $\frac{\pi}{6}$ D: $\frac{2\pi}{3}$ E: $\frac{\pi}{3}$

3. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^4(xy)}{\sin(x^4+y^4)}$ vale

   A: 1 B: N.A. C: 0 D: -1 E: N.E.

4. Il seguente integrale
$$\int\int_\Omega x dx dy$$
   con
$$\Omega = \{(x, y)| \max\{|x|, |y|\} > 1, x^2 + y^2 < 4, x > 0\}$$
   vale:

   A: $\frac{13}{9}$ B: $\frac{13}{6}$ C: $\frac{13}{3}$ D: $\frac{13}{8}$ E: N.A.

5. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos^2(x + y)}{x^2 + y^2}$$
   vale

   A: N.A. B: 1 C: $\frac{1}{2}$ D: 0 E: N.E.

6. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(\sin(x^2+y^2))}{x^4+y^4}$ vale:

   A: $\frac{1}{2}$ B: N.E. C: 0 D: N.A. E: 1

7. Il seguente integrale
$$\int\int_\Omega x dx dy$$
   dove $\Omega = \{(x, y)|x^2 + 4y^2 \leq 1, x > 0\}$ vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: 1 C: N.A. D: $\frac{1}{3}$ E: $\frac{1}{9}$

8. L'integrale
$$\int\int_\Omega xy dx dy$$
   dove $\Omega = \{(x, y)| \max\{x, y\} < 1, \min\{x, y\} > -1, x \cdot y > 0\}$ vale:

   A: 0 B: $\frac{1}{4}$ C: N.A. D: $\frac{1}{2}$ E: 1

9. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue, $f(x, y) = \sin(xy + |xy|)$. Allora il punto $(0, 0)$ e' di:

   A: N.A. B: sella C: min locale D: max locale E: min assoluto

10. Data la funzione $f(x, y) = \ln(1 + \sin(xy))$, allora $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial^2 y}(0, 0)$ vale

    A: 1 B: -2 C: N.A. D: 0 E: 2

CODICE=653732

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

03 Giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

A	B	C	D	E

	A	B	C	D	E
1				X	
2				X	
3					X
4			X		
5					X
6		X			
7				X	
8				X	
9			X		
10					

$\longrightarrow$ B

CODICE=653732

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 03 Giugno 2019

Cognome:____________________________________ ,
Nome:____

Matricola:_______________________________

Esercizio 1
Sia dato l'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 - xy - 1 = 0\}$. Determinare i punti di E aventi minima distanza dall'origine $(0, 0, 0)$.
(Sugg: si ricorda che la distanza del punto (x, y, z) da $(0, 0, 0)$ e' data da $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

Esercizio 2
Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{arctg(x^2y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione risulta differenziabile.

Esercizio 3
Sia data la curva piana $\gamma(t) = (2t^3, 3t^2)$ con $-1 \leq t \leq 1$. Rappresentare graficamente la curva. Calcolare lunghezza e baricentro di γ.

Esercizio 1

Dobbiamo minimizzare la funzione $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, oppure equivalentemente $x^2 + y^2 + z^2$ sul vincolo E. A tal fine usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che ci riconduce a studiare prima il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 02z = 0 \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzioni. E poi

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = 2\lambda z \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che dalla terza equazione abbiamo due casi: $z = 0$ oppure $\lambda = 1$ Nel primo caso avremmo dalla quarta equazione $xy = -1$, mentre dalla prima e dalla seconda equazione (che possiamo moltiplicare per y e per x) avremo $-2 = -\lambda y^2$, $-2 = -\lambda x^2$. Osserviamo anche che possiamo assumere $\lambda \neq 0$ altrimenti avremmo dalle prime equazioni $x = y = 0$ che insieme al fatto che $z = 0$ sarebbe incompatibile con la quarta equazione. Pertanto $x^2 = y^2 = \frac{2}{\lambda}$ e quindi $x^2y^2 = \frac{4}{\lambda^2}$. Ma essendo $xy = -1$ deduciamo $\lambda = \pm 2$. Quindi le prime due equazioni diventano nel caso $\lambda = 2$ rispettivamente $x = -y, y = -x$ che per la terza equazione implicano $x = \pm 1$, e quindi troviamo i punti $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$.
Ritornando al caso $\lambda = 1$ avremo dalle prime due equazioni $2x = -y, 2y = -x$ che implicano $x = y = 0$ e quindi dalla terza equazione $z = \pm 1$, quindi abbiamo trovato anche i punti $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Per confronto diretto del valore della funzione $x^2 + y^2 + z^2$ sui punti trovati e' chiaro che i punti di minima distanza di E dall' origine sono $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$.

Esercizio 2

Per il teorema del differenziale totale la funzione e' differenziabile fuori da $(0, 0)$. Infatti fuori dall'origine possiamo derivare (usando le usuali regole di derivazione) sia rispetto alla x che rispetto alla y, trovando funzioni continue. Quindi siamo nelle ipotesi del teorema del differenziale totale. Cio' ovviamente non ci aiuta in $(0,0)$, che andremo ad analizzare in modo indipendente. Intanto osserviamo che la restrizione sugli assi della funzione $f(x,y)$ e' identicamente zero, quindi il gradiente esiste e vale $(0,0)$. Resta solo da verificare la definizione di differenziabilita' che quindi si riduce in questo a caso a verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{arctg(x^2y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Osserviamo che moltiplicando e dividendo per x^2y siamo ridotti a verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

che si puo'dimostrare usando il metodo delle coordinate polari. Quindi la funzione e'differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3

La curva gamma puo'essere vista anche come il graifco della funzione

$$(-2,2) \ni x \to \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}|x|^{\frac{2}{3}}$$

, quindi basta fare il grafico di questa funzione di una variabile. Si noti che la funzione ha una cuspide in $x=0$.

Per calcolare la lunghezza di γ bisogna calcolare il seguente integrale:

$$l(\gamma) = 6\int_{-1}^{1} \sqrt{t^2+t^4}dt = 6\int_{-1}^{1} |t|\sqrt{1+t^2}dt$$

$$= 12\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt = 6\int_0^1 \sqrt{1+s}ds = 4[(1+s)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = 4\times 2^{\frac{3}{2}}.$$

Per calcolare il baricentro osserviamo che per simmetria necessariamente la componente lungo l'asse x deve essere nulla, mentre per calcolare la componente del baricentro rispetto ad y abbiamo

$$\frac{18}{4\times 2^{\frac{3}{2}}}\int_{-1}^{1} t^2|t|\sqrt{1+t^2}dt = \frac{9}{2^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 t^3\sqrt{1+t^2}dt = \frac{9}{2^{\frac{5}{2}}}\int_0^1 s\sqrt{1+s}ds$$

$$= \frac{9\times 2}{3\times 2^{\frac{5}{2}}}[s(1+s)^{\frac{3}{2}}]_0^1 - \frac{9\times 2}{3\times 2^{\frac{5}{2}}}\int_0^1 (1+s)^{\frac{3}{2}}ds$$

$$= \frac{9\times 2}{3\times 2} - \frac{9\times 2\times 2}{5\times 3\times 2^{\frac{5}{2}}}[(1+s)^{\frac{5}{2}}]_0^1 = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}.$$

PARTE A

1. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p'''(0) = 0 = p'(1)\}$ e $W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p'(0) + p''(0) = 0\}$ allora $dim(V \cap W)$ vale

   A: 1 B: 2 C: 4 D: 3 E: N.A.

2. Sia $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ l' applicazione lineare tale che $L(a + bx + cx^2) = c + bx + ax^2$. Allora gli autovalori di L sono

   A: $(1, i, i)$ B: $(1, 1, -1)$ C: N.A. D: $(1, -1, i)$ E: $(1, i, -i)$

3. Siano V e W i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definiti come segue

$$V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = 0\}, W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = p(0)\}$$

   Allora $d = dim(V + W)$ vale:

   A: 4 B: N.A C: 3 D: 1 E: 2

4. Siano

$$V = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0, x + y + z = 0\}$$

   e

$$W = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 2z = 0, x + 2y + 3z = 0\}$$

   allora $dim(V \cap W)$ vale

   A: 2 B: N.A. C: 1 D: 0 E: 3

5. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ allora $A^{-1}_{2,3}$ (ossia l' elemento della matrice inversa che si trova sulla seconda riga e terza colonna) vale:

   A: 2 B: 1 C: N.A. D: 3 E: -1

6. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare associata ad A (ossia $Lx = A \cdot x$ dove $\cdot$ indica il prodotto matriciale) con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Allora $d = dim(\ker L)$ vale:

   A: 3 B: 2 C: N.A. D: 1 E: 0

7. Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed $e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Allora il seguente sottospazio vettoriale delle matrici 4×4

$$\{A \in Mat(4 \times 4) | A \cdot e_1 = A \cdot e_4\}$$

   ha dimensione

   A: 8 B: N.A. C: 12 D: 16 E: 10

8. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito come segue $L \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 4y+5z \\ 6z \end{bmatrix}$. Allora gli autovalori di L sono

   A: (2,2,2) B: $(1, 1, 1)$ C: N.A. D: $(1, 2, 3)$ E: $(1, 4, 6)$

9. Sia $V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 25}[x] | p'(x + 1) = p'(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora $dimV$ vale

   A: 3 B: N.A. C: 0 D: 2 E: 1

10. Siano $L_1 : V \to V$ ed $L_2 : V \to V$ due applicazioni lineari dove V e' uno spazio vettoriale con $dimV = n$ allora $d = dim(\ker(L_2 \circ L_1))$ soddisfa necessariamente:

    A: $d = \min\{dim(\ker L_1), dim(\ker L_2)\}$ B: $d \geq dim(\ker L_1)$ C: $d = dim(\ker L_1)$ D: $d \leq dim(\ker L_1)$ E: N.A.

CODICE=290508

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

03 Giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1		X			
2		X			
3	X				
4				X	
5		X			
6					X
7			X		
8					X
9				X	
10		X			

CODICE=290508

Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

Prova scritta del 03 Giugno 2019

Cognome:______________________________________,
Nome:____

Matricola:________________________________

Esercizio 1
Siano dati gli spazi vettoriali

$$U = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = 0\}, \quad V = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(2) = 0\}$$

Calcolare:

- $dim\ U$ e $dim\ V$;
- $dim(U \cap V)$;
- $dim(U + V)$.

Esercizio 2
Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

- Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta diagonalizzabile la matrice A_k;
- per tali valori di k trovare una matrice M_k tale che $M_k^{-1} A M_k$ sia in forma diagonale.

Esercizio 3
Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$ di dimension n. Supponiamo che $\ker L = \{0\}$, provare che:

- L e' bigettiva;
- provare che $L^{-1} : W \to V$ e' lineare.

Sol. Esercizio 1 Osserviamo che U e' uguale a $\ker L$ dove $L : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}$, $Lp = p(1)$. Allora dal teorema della dimensione si ha $dim U = dim(\ker L) = 4 - dim(Im L) = 3$. Nell'ultimo passaggio osservaimo che la dimensione dell'immagine e' al piu' uguale ad 1 (essendo contenuta in $\mathbb{R}$) e deve essere 1 poiche' basta osservare che $L(1) \neq 0$. Analogamente $dim V = 3$. Per calcolare $dim(U \cap V)$ osserviamo che $U \cap V = \ker L'$ dove $L' : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^2$ con $L'p = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$. Anche questa volta usando il teorema della dimensione $dim(U \cap V) = dim(\ker L') = 4 - dim(Im L') = 2$ dove abbiamo usato $dim(Im L') = 2$. A tal fine osserviamo che $L'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ quindi l'immagine (che e'contenuta in $\mathbb{R}^2$) contiene due vettori linearmente indipendenti da cui $dim(Im L') = 2$. Per calcolare $dim(U+V)$ usiamo il teorema di Grassman e troviamo $dim(U+V) = dim U + dim V - dim(U \cap V) = 3 + 3 - 2 = 4$.

Sol. Esercizio 2

Il polinomio caratteristico della matrice e' $\lambda(\lambda-1)(\lambda-1-k)$. Quindi la matrice e' sicuramente diagonalizzabile se $k \neq 0, -1$ avendo la matrice tre autovalori distinti.
Se $k = 0$ allora dobbiamo verificare la molteplicita' geometrica di $\lambda = 1$ per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A tal fine basta calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che vale 1 e quindi la molteplicita' geometrica di $\lambda = 1$ vale 2. Quindi anche per $k = 0$ la matrice e' diagonalizzabile.
Per $k = -1$ dobbiamo verificare la molteplicita' geometrica di $\lambda = 0$ per la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Siccome il rango di questa matrice vale 2 ne deduciamo che la molteplicita' geometrica di $\lambda = 0$ vale 1. Quindi per $k = -1$ non e'diagonalizzabile.

Per trovare le matrici che diagonalizzano se $k \neq -1$, consideriamo prima il caso $k \neq 0$, cerchiamo degli autovettori relativi a $0, 1, 1 + k$ che sono:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi la matrice che diagonalizza e' fatta dalle colonne date dai precendeti autovettori. Nel caso $k = 0$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi un autovalore relativo a $\lambda = 0$ e' $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre due autovalori linearmente indipendenti relativi a $\lambda = 1$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi la matrice che diagonalizza per $k = 0$ e' fatta dalle colonne date dai precendete autovettori.

Sol. Esercizio 3

Dal teorema della dimensione abbiamo che $dim(Iml) = n - dim(\ker L) = n = dimW$ e quindi l'applicazione L e' suriettiva essendo l'immagine di L un sottospazio vettoriale di W di dimensione n e quindi deve conicidere con W. D'altra parte sappiamo che se $dim(\ker L) = 0$ allora L e'iniettiva. Quindi L e'bigettiva.
Consideriamo quindi L^{-1} che e' l'inversa insiemistica e osserviamo che se $L^{-1}(w_1) = v_1$ ed $L^{-1}(w_2) = v_2$ allora $L(v_1+v_2) = w_1+w_2$, e quindi $L^{-1}(w_1+w_2) = v_1+v_2$. Da cui deduciamo che L^{-1} rispetta la somma. Verifichiamo la moltiplicazione per scalare: $L^{-1}w = v$ allora per linearita' $L(\lambda v) = \lambda w$ da cui $L^{-1}(\lambda w) = \lambda L^{-1}w$, quindi abbiamo provato anche la linearita' rispetto al prodotto per scalare. Quindi L^{-1} e' lineare.