Secondo compitino di Analisi 2: Ingegneria Civile $10 - 04 - 2021$

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_\Omega (x^2+y^2)dxdy$$

dove

$$\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 > R^2, x^2+4y^2 < 4R^2\}$$

Esercizio 2

Calcolare il seguente flusso

$$Flusso(\Sigma, \vec{F}, \nu)$$

dove $\vec{F}(x,y,z) = ((\cos z)^2 x, (\sin z)^2 y, e^{x^2+y^2})$, Σ e' la superficie ottenuta ruotando intorno all' asse z la curva $\Gamma = \{(y,z)|(y-2)^2+z^2 = 1, z > 0\}$ e la normale ν nel punto $(0,2,1)$ vale $(0,0,1)$.

Esercizio 3

Calcolare il seguente flusso

$$Flusso(\Sigma, \vec{F}, \nu)$$

dove $\vec{F}(x,y,z) = (0, ye^{-x}, 0)$,

$$\Sigma = \{(x,y,z)|x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq y\}$$

e la normale ν nei punti $(0,1,z)$ con $z \in (0,1)$ vale $(0,1,0)$.

Soluzioni

1. Si ha che $B_R \subset E_R$ dove
$$B_R = \{x^2 + y^2 < R^2\}, E_R = \{x^2 + 4y^2 < 4R^2\}.$$
Infatti abbiamo
$$x^2 + y^2 < R^2 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = x^2 + y^2 + 3y^2 < R^2 + 3(x^2 + y^2) < 4R^2.$$
Quindi l' integrale si puo' calcolare per differenza
$$\int\int_{E_R}(x^2+y^2)dxdy - \int\int_{B_R}(x^2+y^2)dxdy = \int\int_{E_R}(x^2+y^2)dxdy - 2\pi\int_0^R \rho^3 d\rho$$
$$= \int\int_{E_R}(x^2 + y^2)dxdy - \frac{\pi}{2}R^4$$
Resta quindi da calcolare $\int\int_{E_R}(x^2 + y^2)dxdy$ che con il cambio di variabili $X = x, Y = 2y$ diventa
$$\frac{1}{2}\int\int_{X^2+Y^2<4R^2}(X^2 + \frac{Y^2}{4})dXdY$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2R}\rho^3(\cos\theta)^2 d\rho d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^{2R}\rho^3(\sin\theta)^2 d\rho d\theta$$
$$= \frac{\pi}{8} \times 16R^4 + \frac{\pi}{32} \times 16R^4.$$
Riassumendo l' integrale assegnato vale $2\pi R^4$.

2. La superficie rappresenta la parte superiore del bordo del toro, quindi non e' una superficie chiusa, ma possiamo chiuderla aggiungendo il tappo $T = \{(x, y, 0)|1 < x^2 + y^2 < 9\}$. Pertanto abbiamo che aggiungendo il tappo si ha che $\Sigma \cup T$ e' il bordo della parte superiore del toro (che indicheremo di seguito con Ω), e la normale esterna coincide con quella assegnata a priori su Σ. Usando il teorema della divergenza si trova
$$Flusso(\Sigma \cup T, \vec{F}, \nu) = \int\int\int_\Omega div\vec{F}dxdydz$$
$$= \int\int\int_\Omega 1dxdydz = vol(\Omega) = 2\pi^2.$$

Pertanto

$$Flusso(\Sigma, \vec{F}, \nu) + Flusso(T, \vec{F}, \nu) = 2\pi^2$$

dove la normale esterna sul tappo e' data dal vettore $(0, 0, -1)$ quindi

$$Flusso(\Sigma, \vec{F}, \nu) = -Flusso(\Sigma \cup T, \vec{F}, \nu) + 2\pi^2 = \int\int_{1<u^2+v^2<9} e^{u^2+v^2} du dv + 2\pi^2$$

$$= 2\pi \int_1^3 e^{\rho^2} \rho d\rho + 2\pi^2 = \pi(e^9 - e) + 2\pi^2$$

3. La superficie Σ puo' essere parametrizzata come segue

$$A \ni (\theta, t) \xrightarrow{r} (\cos\theta, \sin\theta, t)$$

dove

$$A = \{(\theta, t) | \theta \in (0, \pi), t \in (0, \sin\theta)\}.$$

Usando questa parametrizzazione osserviamo che la direzione normale e' data da

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial t} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

che ha lo stesso verso della direzione normale assegnata (basta testare per $\theta = \frac{\pi}{2}$). Quindi il flusso assegnato si calcola svolgendo il seguente integrale:

$$\int\int_A (\cos\theta, \sin\theta, 0) \cdot (0, \sin\theta e^{-\cos\theta}, 0) d\theta dt = \int\int_A (\sin\theta)^2 e^{-\cos\theta} d\theta dt$$

$$= \int_0^\pi (\sin\theta)^3 e^{-\cos\theta} d\theta = \int_{-1}^1 e^{-t}(1-t^2) dt = -[e^{-t}]_{-1}^1 + [e^{-t}t^2]_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 e^{-t} t$$

$$= 2[e^{-t}t]_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 e^{-t} dt$$

$$= 2e^{-1} + 2e + 2[e^{-t}]_{-1}^1 = 4e^{-1}$$