# SCRITTO DEL GIORNO 8 GIUGNO DI ANALISI 3

PER VISIONARE GLI SCRITTI

E PER SOSTENERE L'ORALE

PRESENTARSI PRESSO IL DIP.

DI MATEMATICA (AULA DELLE

RIUNIONI 1° PIANO) ALLE ORE

08:45 DEL GIORNO 9 GIUGNO 2017

Analisi 3 - Corso di Laurea in Fisica (A.A. 2016/2017)

Prova scritta del 08 Giugno 2017

Cognome:___________________________________
Nome:______________________________________

Matricola:____________________________

**Esercizio 1** Per ogni coppia di numeri $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sia assegnata la funzione $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$\begin{cases} f_{\alpha,\beta}(x, y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \sin(|x|^\alpha + |y|^\beta), & (x, y) \neq (0, 0) \\ f_{\alpha,\beta}(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Dire:

- per quali valori di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f_{\alpha,\beta}$ risulta continua su $\mathbb{R}^2$;
- per quali valori di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f_{\alpha,\beta}$ risulta differenziabile in $(0, 0)$;
- dire per quali valori di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ il punto $(0, 0)$ e' un punto di minimo locale.

**Esercizio 2** Sia dato il vettore $a = (a_1, ..., a_n)$ con $a_1 > 0, ..., a_n > 0$. Calcolare

$$\min_{A_a} f(x_1, ..., x_n), \max_{A_a} f(x_1, ..., x_n)$$

dove

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$$

ed

$$A_a = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + ... + a_nx_n = 1, x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0\}.$$

**Esercizio 3** Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int\int_\Omega 2z dx dy dz$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | 2\sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 + x\}.$$

Analisi 3 - Corso di Laurea in Fisica (A.A. 2016/2017)

**Prova scritta del 08 Giugno 2017**

Cognome:____________________________________
Nome:________________________________________

Matricola:______________________________

**Esercizio 1** Per ogni coppia di numeri $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sia assegnata la funzione $f_{\alpha,\beta}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita come segue:

$$\begin{cases} f_{\alpha,\beta}(x,y)=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\sin(|x|^\alpha+|y|^\beta), & (x,y)\neq(0,0)\\ f_{\alpha,\beta}(0,0)=0. \end{cases}$$

Dire:

- per quali valori di $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ la funzione $f_{\alpha,\beta}$ risulta continua su $\mathbb{R}^2$;
- per quali valori di $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ la funzione $f_{\alpha,\beta}$ risulta differenziabile in $(0,0)$;
- dire per quali valori di $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ il punto $(0,0)$ e' un punto di minimo locale.

**Esercizio 2** Sia dato il vettore $a=(a_1,...,a_n)$ con $a_1>0,...,a_n>0$. Calcolare

$$\min_{A_a} f(x_1,...,x_n),\max_{A_a} f(x_1,...,x_n)$$

dove

$$f(x_1,...,x_n)=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$$

ed

$$A_a=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n|a_1x_1+...+a_nx_n=1,x_1\geq 0,...,x_n\geq 0\}.$$

**Esercizio 3** Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int\int_\Omega 2z\,dx\,dy\,dz$$

dove

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|2\sqrt{x^2+y^2}<z<2+x\}.$$

Es. 1

Osserviamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0 \quad \text{e siccome}$$

$\text{sen}\left(|x|^\alpha+|y|^\beta\right)$ è limitata $\forall(\alpha,\beta)$, si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{\alpha,\beta}(x,y)=0 \implies f_{\alpha,\beta} \text{ è cont. in } (0,0) \ \forall \alpha,\beta.$$

Per studiare la differenziabilità in $(0,0)$ per prima cosa vediamo se esiste il gradiente in $(0,0)$.
Siccome $f_{\alpha,\beta}(x,0) = \frac{x^2}{|x|}\,\text{sen}\left(|x|^\alpha\right) = |x|\,\text{sen}\,|x|^\alpha$

abbiamo che $\exists \frac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial x}(0,0) \iff \alpha>0$ e in tal caso

$\frac{\partial f_{\alpha,\beta}(0,0)}{\partial x} = 0$. Con ragionamento analogo

$\exists \frac{\partial f_{\alpha,\beta}(0,0)}{\partial y} \iff \beta>0$ e in tal caso $\frac{\partial f_{\alpha,\beta}(0,0)}{\partial y} = 0$.

Quindi $f_{\alpha,\beta}$ è diff. in $(0,0)$ se e solo se

$\alpha>0, \beta>0$ e se inoltre $\frac{f_{\alpha,\beta}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$.

Ma questo ultimo limite vale 0 per ogni $\alpha, \beta > 0$.
Infatti

$\frac{x^2+y^2}{(|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2}}$ è limitata e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\left(|x|^\alpha+|y|^\beta\right) = 0$

se $\alpha>0$ e $\beta>0$.

Infine abbiamo che se $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ allora

$\operatorname{sen}(|x|^\alpha + |y|^\beta) \geq 0$ se $|x|, |y| < \varepsilon_0$. Quindi in tal caso

$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\right) \operatorname{sen}(|x|^\alpha + |y|^\beta) \geq 0 \quad \forall\, |x|,|y| < \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow f_{\alpha,\beta}(x,y) \geq f_{\alpha,\beta}(0,0) = 0 \quad \forall\, |x|,|y| < \varepsilon_0 \Rightarrow (0,0) \text{ è di min. loc.}$$

Se invece $\min\{\alpha,\beta\} < 0$ allora $|x|^\alpha + |y|^\beta \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} +\infty$ e quindi

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(|x|^\alpha + |y|^\beta) = -1 \quad \text{e} \quad \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(|x|^\alpha + |y|^\beta) = 1.$$

Da cui ~~e quindi~~ $f_{\alpha,\beta}$ assume sia valori negativi sia valori positivi in un intorno di $(0,0)$ e quindi $(0,0)$ non è né max né min locale.

Es. 2 Osserviamo che $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ su $A_a$ ed inoltre $f(\frac{1}{a_1}, 0, \dots, 0) = 0$ quindi

$\boxed{\min_{A_a} f = 0}$. Inoltre se si considera il bordo di $A_a$ si ha che su questo insieme, che è dato da $\{(x_1, \dots, x_n) \in A_a \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 0\}$, si ha che $f$ vale zero.

Quindi il $\max_{A_a} f$ è da cercare tra i punti interni del vincolo, e quindi possiamo usare i moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda a_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda a_n \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \prod_{i \neq 1} x_i = \lambda a_1 \\ \vdots \\ \prod_{i \neq n} x_i = \lambda a_n \end{cases}$$

Il rapporto tra la prima e la seconda eq. implica $\frac{x_2}{x_1} = \frac{a_1}{a_2}$ e il rapporto tra la prima eq. e la j-esima implica

$\frac{x_j}{x_1} = \frac{a_1}{a_j}$, quindi $x_j = \frac{a_1 x_1}{a_j}$.

Ricordandoci del vincolo $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 1$ otteniamo che

$n a_1 x_1 = 1$ e quindi $x_1 = \frac{1}{n a_1}$. Da qui $\boxed{x_j = \frac{a_1 x_1}{a_j} = \frac{1}{n a_j}}$.

Quindi $\boxed{\max_{A_a} f = \frac{1}{n a_1} \times \dots \times \frac{1}{n a_n} = \frac{1}{n^n a_1 \cdots a_n}}$.

Es. 3 Integrando per fili si trova

$$\iiint_\Omega 2z\,dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} 2z\,dz$$

dove $A = \{(x,y) \mid 2\sqrt{x^2+y^2} \le x+2\}$.

Osserviamo che

$$2\sqrt{x^2+y^2} \le x+2 \iff \begin{cases} x \ge -2 \\ 4(x^2+y^2) \le x^2+4+4x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \ge -2 \\ \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}y^2 \le \frac{16}{9}. \end{cases}$$

È facile vedere che la seconda condizione implica la prima, quindi

$$A = \left\{(x,y) \mid \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}y^2 \le \frac{16}{9}\right\}.$$

quindi ritornando all'integrale

$$\iint_A dx\,dy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} 2z\,dz = \iint_A \left[(x+2)^2 - 4(x^2+y^2)\right] dx\,dy =$$

$$= 3\iint_A \left[\frac{16}{9} - \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}y^2\right] dx\,dy.$$

Usando il cambio di variabili $x-\frac{2}{3} = X$ e $y = Y$ si ha

$$\dots = 3\iint_{\tilde{A}} \left(\frac{16}{9} - X^2 - \frac{4}{3}Y^2\right) dX\,dY \quad \text{con}$$

$$\tilde{A} = \left\{(X,Y) \mid X^2 + \frac{4}{3}Y^2 \le \frac{16}{9}\right\}.$$

Usando il cambio $X = X$, $\frac{2}{\sqrt{3}}Y = Y$ si ha

$$\dots = 3\iint_{\tilde{\tilde{A}}} \left(\frac{16}{9} - X^2 - Y^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\,dX\,dY \quad \text{con } \tilde{\tilde{A}} = \left\{X^2+Y^2 \le \frac{16}{9}\right\}$$

Quindi usando ora le polari:

$$\sim = 3\int_0^{4/3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{16}{9}-\rho^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 2\pi \int_0^{4/3}\left(\frac{16}{9}\rho-\rho^3\right)d\rho =$$

$$= 3\sqrt{3}\,\pi\left[\frac{16}{9}\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{4}{3}} =$$

$$= 3\sqrt{3}\,\pi\left[\frac{16}{9}\right]\cdot\left(\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{2}-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}\,\pi\cdot 16}{\cancel{9}\,3}\cdot\frac{\cancel{16}^{4}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}\,\pi\cdot 64}{27}}$$