Analisi 3 - Corso di Laurea in Fisica (A.A. 2016/2017)

Prova scritta del 28 Giugno 2017

Cognome:_______________________________________
Nome:____

Matricola:______________________________

Esercizio 1 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y) = \max\{|x|, y^2\}.$$

Dire in quali punti (x, y) la funzione è :

- continua;
- differenziabile.

Calcolare inoltre $\int\int_\Omega f(x, y)dxdy$ dove

$$\Omega = \{(x, y)|\max\{x, y\} < 1, \min\{x, y\} > -1\}.$$

Esercizio 2 Sia data la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua e non-negativa, ossia $F \geq 0$. Supponiamo inoltre che il seguente integrale improprio $\int_{\mathbb{R}^3} F(x, y, z)dxdydz$ sia convergente. Provare che esiste una successione di numeri reali e positivi r_n tali che

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} r_n \int_{S_{r_n}} F(x, y, z)d\sigma = 0$$

dove $S_{r_n} = \{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2 = r_n^2\}$ e $d\sigma$ indica l'integrazione sulla superficie S_{r_n}.

Provare che in generale sotto le stesse ipotesi su F non si puo' dedurre

$$\lim_{r\to\infty} r \int_{S_r} F(x, y, z)d\sigma = 0.$$

Esercizio 3 Per ogni fissata terna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definiamo

$$\Omega_{\alpha,\beta,\gamma} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1, \alpha x + \beta y + \gamma z > 0\}.$$

Calcolare

$$vol(\Omega_{\alpha,\beta,\gamma}).$$

SOLUZIONI

SCRITTO FISICA ANALISI III

28 GIUGNO 2017

<u>Es. 1</u> La funzione è ottenuta componendo

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad G(x,y) = (|x|, y^2)$$

$$\text{e} \quad T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad T(s,t) = \max\{s,t\}.$$

Essendo T e G continue si ha che

$T \circ G$ è cont. su $\mathbb{R}^2$.

Riguardo la differenziabilità osserviamo che al di fuori della regione $x = y^2$ si può applicare il diff. totale e quindi in questa regione è diff.

Nella regione $|x| = y^2$ osserviamo che se (x_0, y_0) sono tali che $|x_0| = y_0^2$ e $x_0 \neq 0$ allora $\nexists \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ poiché derivate destra e sinistra sono diverse tra loro.

Resta escluso solo dell'analisi il punto $(x_0, y_0) = (0,0)$. Siccome

$$f(x,0) = |x| \implies \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

~~e~~ quindi neppure in $(0,0)$ è diff.

In conclusione f è diff. su

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid |x| = y^2\}.$$

Per calcolare $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} |x| \, dy \right) dx + ~~\text{dato altro}~~$$

$$+ 4 \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} y^2 \, dx \right) dy$$ dove abbiamo usato

la simmetria di $f(x,y)$.

Quindi $\iint_\Omega f \, dx\,dy = 4 \int_0^1 x\sqrt{x}\,dx + 4 \int_0^1 y^4\,dy$

$$= 4 \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Es. 2 Per ipotesi

$$\lim_{R\to\infty} \iiint_{B_R} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = L < +\infty$$

Passando in coordinate sferiche si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\rho\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi, \rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\alpha\, d\varphi$$

ma abbiamo anche che:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\rho\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi, \rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\alpha\, d\varphi =$$

$$= \int_{S_\rho} F(x,y,z)\, d\sigma$$

quindi per ipotesi

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R g(\rho)\, d\rho = L < +\infty \text{ dove}$$

$$g(\rho) = \int_{S_\rho} F(x,y,z)\, d\sigma.$$

Da ciò deduciamo che

$$\exists\, r_n \longrightarrow +\infty \text{ t.c. } r_n g(r_n) \longrightarrow 0.$$

Infatti se non fosse vero, allora

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \text{ t.c. } r g(r) > \varepsilon_0 \quad \forall r \gg \bar{r}$$

$$\Longrightarrow \quad g(r) > \frac{\varepsilon_0}{r} \quad \forall r \gg \bar{r} \text{ e quindi}$$

per confronto $\displaystyle\int_1^\infty g(r)\,dr = +\infty$,

contraddicendo l'ipotesi.

Per provare che in generale non è vero

$$\lim_{r\to\infty} r\int_{S_r} F\,d\sigma = 0$$

Consideriamo una $F(x,y,z)$ radiale, ossia

$$F(x,y,z) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Allora in tal caso noi imponiamo a φ le seguenti proprietà:

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r \varphi(s)\, s^2\, ds = L < +\infty$$

ed inoltre

$\exists\, r_n \to \infty$ t.c.

$$\lim_{n\to\infty} r_n^3 \cdot \varphi(r_n) = M > 0.$$

A tal fine basta scegliere una funzione continua

$$\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$\varphi(n) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \boxed{\int_0^{\infty} \varphi(s)\, s^2\, ds < +\infty}.$$

Es. 3 Sia $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+2y^2+3z^2 < 1\}$

e sia $\tilde{\Omega}_{\alpha,\beta,\gamma} = \{(x,y,z) \mid x^2+2y^2+3z^2 < 1, \ \alpha x+\beta y+\gamma z < 0\}$.

Allora $\Omega = \tilde{\Omega}_{\alpha,\beta,\gamma} \cup \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Osserviamo che dal cambio di variabili $(x,y,z) \longrightarrow (-x,-y,-z)$ si deduce

$$\mathrm{Vol}(\tilde{\Omega}_{\alpha,\beta,\gamma}) = \mathrm{Vol}(\Omega_{\alpha,\beta,\gamma})$$

e quindi

$$\mathrm{Vol}(\Omega_{\alpha,\beta,\gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(\Omega) = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{6}}}$$