**Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2017/2018)**

**Prova scritta del 4 Settembre 2018**

Cognome:____________________________________ ,
Nome:________________________________________

Matricola:______________________________

**Esercizio 1**
Trovare una funzione $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \to u(t, x) \in \mathbb{R}$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ che sia soluzione il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u + u = e^{t+2x} \\ u(0, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Esercizio 2** Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che

1. $\Delta u = 0$ su $\mathbb{R}^n$;
2. esistono $C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tali che $|u(x)| \leq C|x|^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Provare che $u(x)$ e' necessariamente un polinomio di grado minore o uguale a $k$.
(Oss: se $k = 0$ il problema equivale al teorema di Liouville visto a lezione in base al quale ogni funzioni armonica limitata e' costante).

# 1 Soluzioni

**Esercizio 1**
L'equazione e ' semilineare del primo ordine, quindi il sistema caratteristico associato e'

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{z} = -z + e^{t+2x} \\ x(0) = x_0 \\ z(0) = u(0, x(0)) = 0 \end{cases}$$

dove le condizioni iniziali sono legate all'ipotesi $u(0, x) = 0$. Pertanto per integrazione diretta $x(t) = x_0 + t$ e $\dot{z} = -z + e^{3t+2x_0}$ da cui

$$z(t) = \frac{e^{2x_0}}{4}(e^{3t} - e^{-t}).$$

Quindi deduciamo che

$$u(t, x_0 + t) = \frac{e^{2x_0}}{4}(e^{3t} - e^{-t})$$

che implica

$$u(t, x) = \frac{e^{2x-2t}}{4}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{e^{2x+t}}{4} - \frac{e^{2x-3t}}{4}.$$

**Esercizio 2** Se $k = 1$ allora per il principio della media e ricordando che $Du$ e' armonica, deduciamo che

$$|Du(x_0)| = |\frac{\int_{B_r(x_0)} Du(x)dx}{vol(B_r(x_0))}| = |\frac{\int_{S_r(x_0)} u(x)\nu dx}{vol(B_r(x_0))}| \leq C\frac{|x_0| + r}{r}$$

(qui $D$ indica una qualsiasi derivata parziale e $\nu$ indica la corrispettiva componente della normale). Se scegliamo quindi $r = |x_0|$ allora

$$|Du(x_0)| \leq C.$$

Usando ancora il principio della media per $D^2u$ (dove $D^2u$ indica una generica derivata seconda) otteniamo

$$D^2u(x_0) = \frac{\int_{B_r(x_0)} D^2u(x)dx}{vol(B_r(x_0))} = \frac{\int_{S_r(x_0)} Du(x)\nu dx}{vol(B_r(x_0))}$$

e quindi usando il fatto provato sopra che $|Du(x)| \leq C$, e passando al limite per $r \to \infty$ troviamo $D^2u(x) = 0$. Cio' implica che $u(x)$ e'un polinomio di grado 1 (perche'?).

Trattiamo ora il caso generico $k > 1$, quindi ci basta provare che se $|u(x)| \leq C|x|^k$ allora $D^{k+1}u(x) = 0$ dove $D^{k+1}$ indica l'insieme di tutte le derivate di ordine $k+1$ (perche'?) e lavoriamo per induzione su $k$. Proveremo che

$$|u(x)| \leq C|x|^{k+1} \Longrightarrow |Du(x)| \leq C|x|^k \Longrightarrow |D^{k+2}u(x)| = 0$$

dove la seconda implicazione segue per l'ipotesi induttiva fatta su $k$, usando ovviamnete il fatto che $Du$ e' armonica. Per provare la prima implicazione di sopra osserviamo, seguendo l'argomento usato per $k = 1$, che

$$Du(x_0) = \frac{\int_{B_r(x_0)} Du(x)dx}{vol(B_r(x_0))} = \frac{\int_{S_r(x_0)} u(x)\nu dx}{vol(B_r(x_0))}$$

e quindi

$$|Du(x_0)| \leq C\frac{(|x_0| + r)^{k+1}}{r}$$

e quindi scegliendo $r = |x_0|$ abbiamo

$$|Du(x_0)| \leq C|x_0|^k.$$