Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2017/2018)

Prova scritta del 31 Gennaio 2019

Cognome:____________________________________ ,
Nome:____

Matricola:____________________________

Esercizio 1 Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato ed L_V l'operatore cosi' definito

$$L_V w(x) = -\Delta w(x) + V(x)w(x)$$

dove $V(x) \in C^0(\Omega)$, $V(x) \geq 0$. Provare che il seguente problema

$$\begin{cases} L_V u(x) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), & \forall x \in \partial\Omega \\ u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

dove $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, ammette al piu' una soluzione.

Esercizio 2
Ricordiamo che $L^{p,\infty}$ indica lo spazio delle funzioni L^p-deboli.
Siano f_1, f_2 due funzioni tali che $f_i \in L^{p_i,\infty}$, con

$$1 < p_1 < p_2 < \infty, \ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.$$

Provare che $f_1 \times f_2 \in L^{1,\infty}$.

1 Soluzioni

Esercizio 1
Per differenza possiamo ricondurci al caso $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$. In tal caso $u = 0$ su Ω e' ovviamente una soluzione, e vogliamo provare che e' l'unica. A tal fine, per ogni soluzione $u(x)$ introduciamo

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega | u(x) > 0\}, \quad \Omega_- = \{x \in \Omega | u(x) < 0\}.$$

Proveremo che $\Omega_\pm = \emptyset$, ottenendo la conclusione desiderata. Proviamo $\Omega_+ = \emptyset$ (la dimostrazione che $\Omega_- = \emptyset$ e' simile). Osserviamo che

$$0 = L_V u(x) = -\Delta u(x) + V(x)u(x) \geq -\Delta u(x), \quad \forall x \in \Omega_+$$

quindi su Ω_+ la funzione u soddisfa $-\Delta u \leq 0$, in base a quanto visto a lezione questo implica $\max_{\bar{\Omega}_+} u = \max_{\bar{\Omega}_+ \setminus \Omega_+} u = 0$ dove abbiamo usato il fatto che per continuita' $u(x) = 0$ su $\bar{\Omega}_+ \setminus \Omega_+$.

Esercizio 2
Ricordiamo che

$$ab \leq \frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2}, \quad \forall a, b \geq 0$$

quindi $\{|f_1(x)||f_2(x)| > \lambda\} \subset \{|f_1(x)|^{p_1} > \frac{\lambda p_1}{2}\} \cup \{|f_2(x)|^{p_2} > \frac{\lambda p_2}{2}\}$ da cui

$$\begin{aligned} mis\{|f_1(x)||f_2(x)| > \lambda\} &\leq mis\{|f_1(x)|^{p_1} > \frac{\lambda p_1}{2}\} + mis\{|f_2(x)|^{p_2} > \frac{\lambda p_2}{2}\} \\ &\leq \frac{2}{\lambda p_1} \|f_1\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}} + \frac{2}{\lambda p_2} \|f_2\|^{p_2}_{L^{p_2,\infty}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\|f_1 \times f_2\|_{L^{1,\infty}} \leq \frac{2}{p_1} \|f_1\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}} + \frac{2}{p_2} \|f_2\|^{p_2}_{L^{p_2,\infty}}$$