Compito di Analisi 2 di Ingegneria Civile, Edile ed Ambientale

Thursday 6^{th} July, 2023

1. Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{|x|} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

risulta differenziabile.

2. Calcolare l' area della superficie ottenuta ruotando attorno all' asse z la curva ∂D dove

$$D = \{(y,z) | 1 < (y-4)^2 + z^2 < 4, z > 0, y > 4\}.$$

3. Dire (giustificando la risposta) se esistono

$$\min_A f(x,y), \quad \max_A f(x,y)$$

dove $f(x,y)$ e' l'unica funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $\nabla f(x,y) = (y,x)$ ed $f(0,0) = 0$, ed inoltre

$$A = \{(x,y) | x^2 - xy + y^2 - 1 = 0\}.$$

In caso affermativo calcolare $\min_A f(x,y), \quad \max_A f(x,y)$.

Soluzioni

1. Nelle zone $A_+ = \{(x,y)|x > 0\}$ ed $A_- = \{(x,y)|x < 0\}$ la funzione e' sicuramente differenziabile per via del teorema del differenziale totale poiche' in queste due zone la f assume le espressioni $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}e^x$ ed $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{-x}$ che non presentano singolarita' in A_+ ed A_-. Restano quindi da studiare i punti $(0, y_0)$. Iniziamo con il punto $(0,0)$. In questo punto la funzione ha gradiente nullo, poiche' la f si annulla sugli assi e quindi la differenziabilita' in $(0,0)$ e' legata al limite seguente
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}e^{|h|}$$
quindi abbiamo il limite del prodotto di due funzioni di cui la prima non ha limite mentre la seconda ha limite 1, quindi il limite non esiste ed f non e' differenziabile in $(0,0)$. Studiamo ora i punti $(0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$. Essendo la funzione nulla sull' asse delle y si ha che $\partial_y f(0,y_0) = 0$, studiamo ora $\partial_x f(0,y_0)$. A tal fine scriviamo il rapporto incrementale
$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{hy_0}{\sqrt{h^2+y_0^2}}e^{|h|}}{h} = \frac{y_0}{|y_0|}.$$
Quindi la differenziablita' nel punto $(0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$ e' legata al seguente limite:
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h(y_0+k)}{\sqrt{h^2+(y_0+k)^2}}e^{|h|} - \frac{y_0}{|y_0|}h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{y_0+k}{\sqrt{h^2+(y_0+k)^2}}e^{|h|} - \frac{y_0}{|y_0|}\right)$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{|y_0|(y_0+k)e^{|h|} - y_0\sqrt{h^2+(y_0+k)^2}}{|y_0|\sqrt{h^2+(y_0+k)^2}}\right)$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{y_0^2(y_0+k)^2e^{2|h|} - y_0^2(h^2+(y_0+k)^2)}{(|y_0|\sqrt{h^2+(y_0+k)^2})(|y_0|(y_0+k)e^{|h|} + y_0\sqrt{h^2+(y_0+k)^2})}\right)$$
Osserviamo ora che
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (|y_0|\sqrt{h^2+(y_0+k)^2})(|y_0|(y_0+k)e^{|h|} + y_0\sqrt{h^2+(y_0+k)^2}) = 2y_0^3|y_0| \neq 0$$
ed inoltre
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} y_0^2(y_0+k)^2e^{2|h|} - y_0^2(h^2+(y_0+k)^2) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} y_0^2(y_0+k)^2(e^{2|h|}-1) - y_0^2h^2 = 0$$
e pertanto ritornando al nostro al limite che ci interessa lo possiamo vedere come il prodotto di una funzione limitata (ossia $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$) per una funzione che tende a zero, e quindi il limite complessivo fara' zero. Pertanto la funzione e' differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. La curva ∂D e' fatta di 4 pezzi: γ_1 che rappresenta un quarto di cerchio centrato in $(4,0)$ di raggio 1, γ_2 che rappresenta un quarto di cerchio centrato in $(4,0)$ di raggio 2, γ_3 che rappresenta il segmento congiungente $(5,0)$ con $(6,0)$, γ_4 che rappresenta il segmento congiungente $(4,1)$ e $(4,2)$. Usando Guldino per superfici abbiamo che l' area cercata equivale a
$$2\pi\int_{\gamma_1} ydS + 2\pi\int_{\gamma_2} ydS + 2\pi\int_{\gamma_3} ydS + 2\pi\int_{\gamma_4} ydS$$

Abbiamo che

$$\int_{\gamma_1} ydS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4+\cos t)dt = 2\pi + 1$$

$$\int_{\gamma_2} ydS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(4+2\cos t)dt = 4\pi + 4$$

$$\int_{\gamma_3} ydS = \int_5^6 tdt = \frac{11}{2}$$

$$\int_{\gamma_3} ydS = \int_1^2 4dt = 4$$

e quindi l' area cercata vale

$$2\pi(6\pi + 9 + \frac{11}{2}) = 12\pi^2 + 29\pi$$

3. La funzione f e' continua e l' insieme A e' chiuso e limitato. Questo deriva dal fatto che A puo' essere descritto come segue:

$$\{(x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1\}$$

e quindi nelle variabili $X = x - \frac{y}{2}, Y = y$ e' un' ellisse che e' un chiuso e limitato. Consideriamo ora i due sistemi di Lagrange per calcolare (si nota che non A non ha punti interni quindi non si devono studiare i punti critici di f). Si vede facilmente che il primo sistema non ha soluzioni

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Infatti dalle prime due equazioni avremmo $(0,0)$ che non soddisfa la terza equazione. Passiamo ora al secondo sistema di Lagange:

$$\begin{cases} y = \lambda(2x - y) \\ x = \lambda(-x + 2y) \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y(1+\lambda) = \lambda 2x \\ x(1+\lambda) = \lambda 2y \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

e quindi se $\lambda + 1 \neq 0$ si ha

$$\begin{cases} y = \frac{\lambda 2}{\lambda+1}x \\ x = \frac{\lambda 2}{\lambda+1}y \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Nel caso $\lambda + 1 = 0$ le prime due equazioni del sistema iniziale danno $(x, y) = (0, 0)$ che non soddisfa la terza equazione. Notiamo anche che nel caso in cui $x = 0$ allora sempre dall' equazione iniziale ed assumendo $\lambda + 1 \neq 0$ si ha $y = 0$ che non e' compatibile con la terza equazione. Similmente possiamo assumere $y \neq 0$. Quindi possiamo supporre $x \neq 0$ ed $y \neq 0$ e pertanto l' ultimo sistema scritto implica $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ ossia $y = \pm x$ e pertanto dalla terza equazione abbiamo se $y = x$ allora $x = \pm 1$ e quindi i punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, oppure se $y = -x$ allora $x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e quindi i punti $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. E' quindi ora facile dedurre che $max_A f = 1$ e $min_A f = -\frac{1}{3}$.