Primo Compitino di Analisi 2 a.a. 2022/23- Ingegneria Civile-Edile

Prova parziale del 13 dicembre 2022

Esercizio 1 Studiare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}$$

Esercizio 2 Descrivere tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ in cui risulta differenziabile la funzione

$$f(x,y) = \frac{e^{-|y|}}{1+|x|}$$

Esercizio 3 Dire (giustificando la risposta) se esistono $\min_K f$ e $\max_K f$ dove

$$K = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+xy}{1+z^2}.$$

In caso affermativo calcolare tali valori esplicitamente.

Soluzioni

Esercizio 1 Il limite dato equivale allo studio di $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tenuto conto del limite notevole $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$. Quest'ultimo limite non esiste poiche' la restrizione sugli assi vale 1, mentre la restrizione su $y = x$ vale $\sqrt{2}$.

Esercizio 2 Sicuramente la funzione e' differenziabile fuori dagli assi (infatti in questa zona puo' essere "liberata" dei valori assoluti e quindi si puo' applicare il teorema del differenziale totale). Restano da studiare i punti che stanno sugli assi. Consideriamo quindi un generico punto sull' asse x della forma $(x_0, 0)$, allora si ha che $\partial_y f(x_0, 0)$ non esiste. Infatti la restrizione di f sulla retta verticale passante per $(x_0, 0)$ corrisponde alla funzione $y \to \frac{e^{-|y|}}{1+|x_0|}$ che non e' derivabile per $y = 0$. Quindi in $(x_0, 0)$ non esiste il gradiente e quindi non puo' essere differenziabile. Nei punti dell'asse y del tipo $(0, y_0)$ osserviamo che non esiste $\partial_x f(0, y_0)$ poiche' la restrizione alla retta orizzontale passante per $(0, y_0)$ e' la funzione $x \to \frac{e^{-|y_0|}}{1+|x|}$ che non e' derivabile per $x = 0$. Quindi il gradiente non esiste neppure sull' asse y e quindi in questi punti non e' differenziabile.

Esercizio 3 L' insieme K e' chiuso e limitato e la funzione f e' chiaramente continua, quindi per il teorema di Weiestrass esistono max e min. Per calcolarli esplicitamente prima studiamo i punti interni in cui imponiamo $\nabla f = 0$. Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{1+z^2} = 0 \\ \frac{x}{1+z^2} = 0 \\ -\frac{2z(x^2+xy)}{(1+z^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione troviamo $x = 0$ e quindi dalla prima equazione troviamo $y = 0$. Dalla terza equazione deduciamo che, essendo $x = y = 0$, il valore di z puo' essere arbitrario. Quindi i punti critici interni sono $(0, 0, z)$ con $|z| < 1$. In tali punti la funzione f vale 0 che useremo come dato per il confronto finale. Resta da studiare il bordo e lo faremo con i moltiplicatori di Lagrange. Il primo sistema del metodo dei moltiplicatori di Lagrange non ammette soluzioni, quindi ci concentriamo sul secondo sistema

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{1+z^2} = 2\lambda x \\ \frac{x}{1+z^2} = 2\lambda y \\ -\frac{2z(x^2+xy)}{(1+z^2)^2} = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e la terza per z e sommando troviamo (ricordando l' ultima equazione)

$$\frac{(2x^2+xy+xy)(1+z^2)-2z^2(x^2+xy)}{(1+z^2)^2} = 2\lambda \iff 2(x^2+xy)(1-z^2) = 2\lambda(1+z^2)^2$$

Da questa relazione deduciamo nel caso $z^2 \neq 1$

$$x^2+xy = \frac{\lambda(1+z^2)^2}{1-z^2} \tag{1}$$

e invece nel caso $z^2 = 1$ troviamo (usando la quarta equazione) le soluzioni $(0,0,\pm 1)$ in cui la funzione vale 0 (valore gia' trovato sopra nell' analisi dei punti interni). Quindi usando la relazione (1) e la terza equazione troviamo

$$\frac{-2z\lambda}{(1-z^2)} = 2\lambda z$$

che possiamo anche riscrivere come

$$2\lambda z(\frac{2-z^2}{1-z^2}) = 0$$

Quindi abbiamo tre casi: $\lambda = 0, z = \pm\sqrt{2}, z = 0$. Se $\lambda = 0$ dalle prime due equazioni troviamo $x = y = 0$ e su questi punti la funzione vale 0; il caso $z = \pm\sqrt{2}$ ossia $z^2 = 2$ e' incompatibile con $x^2+y^2+z^2 = 1$; resta quindi solo il caso $z = 0$ e quindi troviamo dalla prima, seconda e quarta equazione

$$\begin{cases} 2x+y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Osserviamo che se $x = 0$ allora $y = \pm 1$ e quindi troviamo i punti $(0, \pm 1, 0)$ dove f vale 0, se $y = 0$ allora $x = \pm 1$ e troviamo i punti $(\pm 1, 0, 0)$ dove f vale 1. Nei casi rimanenti in cui x ed y sono diversi da zero possiamo dividere per x la prima equazione in (2) e per y la seconda equazione in (2) e sottraendo troviamo

$$2 + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0.$$

Quindi se poniamo $t = \frac{x}{y}$ si trova $2 + \frac{1}{t} - t = 0$ che equivale a $2t + 1 - t^2 = 0$ che ha per soluzione $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Quindi abbiamo $x = (1 \pm \sqrt{2})y$ ed $x^2 + y^2 = 1$. Quindi se $x = (1 + \sqrt{2})y$ allora (tenuto conto che $x^2 + y^2 = 1$) abbiamo $y^2(4 + 2\sqrt{2}) = 1$ e quindi troviamo i punti $(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, 0), (-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, 0)$ altrimenti se $x = (1 - \sqrt{2})y$ allora ragionando come sopra $y^2(4 - 2\sqrt{2}) = 1$ e quindi troviamo i punti $(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, 0), (-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, 0)$. Quindi restano da confrontare i valori

$$0, 1, f(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, 0), f(-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, 0),$$

$$f(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, 0), f(-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, 0)$$

ossia

$$0, 1, \frac{1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}, \frac{1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$$

che possiamo riscrivere come segue

$$0, 1, \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}, \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$$

e da facile confronto deduciamo che il minimo vale $\frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$ ed il massimo $\frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$.