SECONDO COMPITINO DI ANALISI II
ING. CIVILE 13-04-2023

1) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

dove

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 16,\ x^2+(y-2)^2\ge 4\}$$

2) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_\Omega e^y\sqrt{x^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$$

dove

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le x\le 1,\ 0\le y\le x^3\}$$

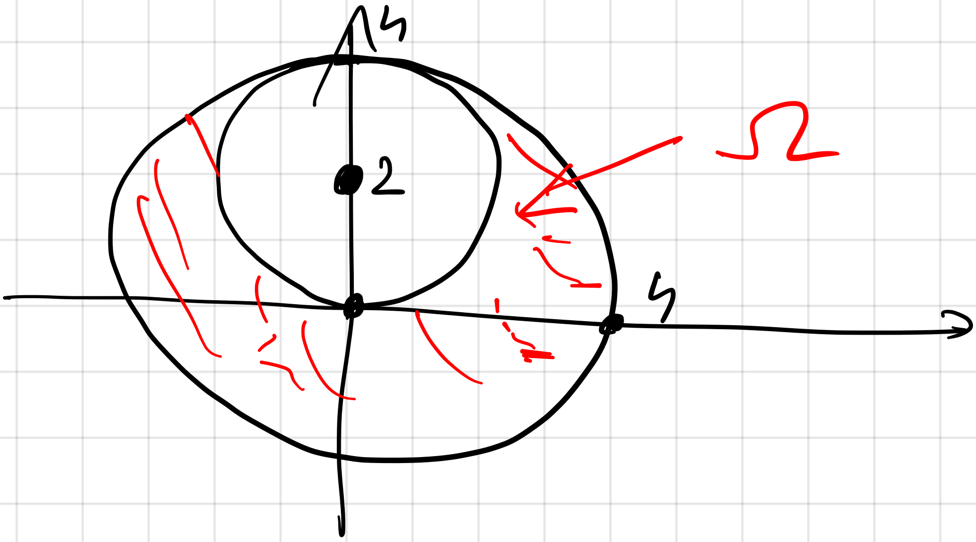
3) Dire se il seguente campo vettoriale è conservativo

$$(e^x\cos y+yz,\ xz-e^x\sin y,\ xy)$$

In caso affermativo calcolarne la primitiva che vale 1 in $(0,0,0)$.

SOLUZIONI

1) Il dominio Ω è il seguente:



Chiamiamo B_1 la palla centrata in $(0,0)$ raggio 4 e B_2 la palla centrata in $(0,2)$ di raggio 2.

Allora

$$\iint_{\Omega} = \iint_{B_1} - \iint_{B_2} .$$

Calcolo prima

$$\iint_{B_1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^4\int_0^{2\pi} \rho^3 \,d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_0^4 2\pi = \frac{\pi}{2} \times 256 = 128\pi$$

Calcolo ora $\iint_{B_2} (x^2+y^2)\,dx\,dy$ facendo prima la traslazione

$x = u$

$y = v+2$

riduciamo il dominio d'integrazione alla palla di raggio 2 centrata in $(0,0)$ e quindi

$$\iint_{B_2} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{u^2+v^2\le 4} [u^2+(v+2)^2]\,du\,dv =$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 4} (u^2+v^2+4+4v)\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3\,d\rho\,d\theta + 4\times 4\pi + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{4\iint_{u^2+v^2\le 4} v\,du\,dv}}$$

$$= \frac{1}{4}\times 16\times 2\pi + 16\pi = 24\pi$$

Quindi l'integrale dato vale

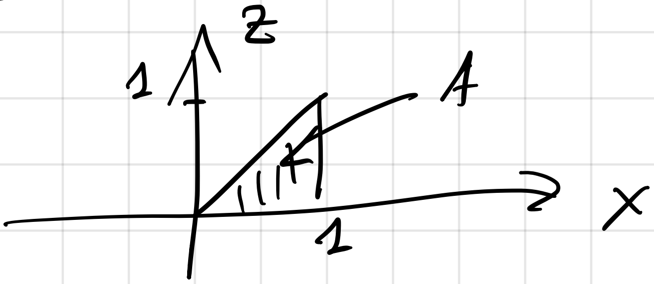
$(128-24)\pi = 104\pi$

2) Osserviamo che Ω si descrive come segue:

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in A,\ 0 \le y \le x^3\}$$

dove

$$A = \{(x,z) \mid 0 \le z \le x \le 1\}$$



Pertanto integrando per fili

$$\iiint_\Omega = \iint_A dx\,dz \left(\int_0^{x^3} e^y \sqrt{x^2 - z^2}\, dy \right)$$

$$= \iint_A \left(e^{x^3} - 1\right) \sqrt{x^2 - z^2}\, dx\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \left(\int_0^x \left(e^{x^3} - 1\right) \sqrt{x^2 - z^2}\, dz \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x^3} - 1\right) \int_0^x x \sqrt{1 - \left(\frac{z}{x}\right)^2}\, dz =$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x^3} - 1\right) x^2 \int_0^1 \sqrt{1 - w^2}\, dw$$

$$= \left(\int_0^1 (e^{x^3}-1)\, x^2 dx\right) \int_0^1 \sqrt{1-w^2}\, dw$$

$$= \left[\frac{e^{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \int_0^1 \sqrt{1-w^2}\; dw$$

$$= \left(\frac{e}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\; \cos t\, dt$$

$$= \left(\frac{e-2}{3}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{(e-2)}{3} \times \frac{\pi}{4}.$$

3) Verifichiamo se il campo è irrotazionale:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -e^x xy + z = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

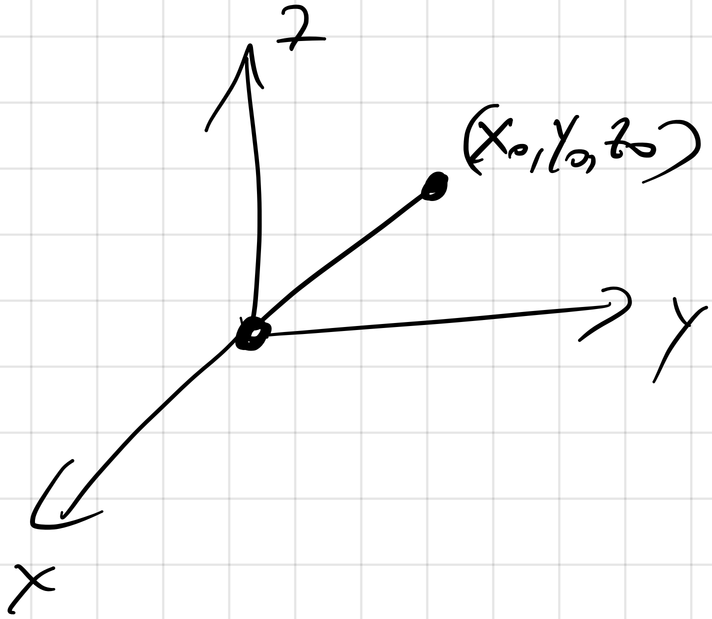
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = x = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Quindi il campo è irrotazionale, ed essendo $\mathbb{R}^3$ il suo dominio allora è conservativo.

Per cercare la primitiva cercata calcoliamo prima la primitiva che si annulla in $(0,0,0)$ e poi sommeremo 1 alla fine.

Per calcolare la primitiva nulla in $(0,0,0)$ integriamo il campo lungo il segmento da $(0,0,0)$ ad (x_0,y_0,z_0)



Allora si ha

$$U(x_0,y_0,z_0) = \int_0^1 \left(e^{tx_0}\cos ty_0 + t^2 y_0 z_0\right) x_0 \, dt$$

$$+ \int_0^1 \left(t^2 x_0 z_0 - e^{tx_0} \sin t y_0\right) y_0 \, dt$$

$$+ \int_0^1 t^2 x_0 y_0 z_0 \, dt$$

$$= x_0 y_0 z_0 + \int_0^1 e^{tx_0}\left(\cos(ty_0)\, x_0 - \sin(ty_0)\, y_0\right) dt$$

$$= x_0 y_0 z_0 + \left[e^{tx_0}\cos(ty_0)\right]_0^1 = x_0 y_0 z_0 + e^{x_0}\cos y_0 - 1$$

quindi la primitiva cercata vale:

$$U(x,y,z) = xyz + e^x \cos y.$$