Analisi 2 Ingegneria Civile $07-06-2021$

Esercizio 1

Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili in $(0,0)$. Provare che anche la funzione prodotto $f \cdot g$, ossia la funzione $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to f(x,y) \cdot g(x,y)$, e' differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 Sia Σ la superficie $\{(x,y,z)|z = 1-x^2-y^2, z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$. Calcolare l' area di Σ.

Esercizio 3 Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?

SOLUZIONI

Esercizio 1 Per semplicita' scriveremo $(0,0) = 0$ e $h = (h_1, h_2)$. Quindi abbiamo

$$f \cdot g(h) - f \cdot g(0) = f(h) \cdot g(h) - f(h)g(0) + f(h)g(0) - f(0) \cdot g(0)$$
$$= f(h) \cdot (g(h) - g(0)) + (f(h) - f(0)) \cdot g(0)$$

Per ipotesi differenzaibilita' di f e g sappiamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0) - \nabla g(0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

e similmente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0) - \nabla f(0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

e quindi ' identita' scritta sopra puo' essere riscritta come segue

$$f \cdot g(h) - f \cdot g(0) = f(h)[\nabla g(0) \cdot h + o(\|h\|) + (\nabla f(0) \cdot h + o(\|h\|)) \cdot g(0)$$

$$= (f(h)-f(0))[\nabla g(0) \cdot h + o(\|h\|)] + f(0)[\nabla g(0) \cdot h + o(\|h\|)] + (\nabla f(0) \cdot h + o(\|h\|))g(0)$$

da cui

$$f \cdot g(h) - f \cdot g(0) - f(0)\nabla g(0) \cdot h - g(0)\nabla f(0) \cdot h$$
$$= (f(h) - f(0))\nabla g(0) \cdot h + (f(h) - f(0))o(\|h\|) + f(0)o(\|h\|) + g(0)o(\|h\|).$$

Osserviamo che il termine scritto ha destra e' $o(\|h\|)$, infatti gli ultimi due termini lo sono sicuramnete e per il primo osserviamo che essendo f differenziabile in 0 e' necessariamente continua in 0 e quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(h) - f(0))\nabla g(0) \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Pertanto concludiamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f \cdot g(h) - f \cdot g(0) - f(0)\nabla g(0) \cdot h - g(0)\nabla f(0) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

e quindi $f \cdot g$ e' differenziabile in 0.

Esercizio 2 La superficie e' una porzione del grafico della funzione

$$(x, y) \to 1 - x^2 - y^2$$

ristretta alla zona
$$-\frac{1}{2} < 1 - x^2 - y^2 < \frac{1}{2}$$
ossia $\frac{1}{2} < x^2 + y^2 < \frac{3}{2}$. Pertanto abbiamo che

$$Area(\Sigma) = \int\int_{\frac{1}{2}<x^2+y^2<\frac{3}{2}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} 8\rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho = \frac{\pi}{4}\int_2^6 \sqrt{1+t}dt = \frac{\pi}{6}[(1+t)^{\frac{3}{2}}]_2^6 = \frac{\pi}{6}(7^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}})$$

Esercizio 3 Consdieriamo l' evento $E = \{\text{la lampadina e' difettosa}\}$ e consideriamo anche gli eventi $A = \{\text{ho scelto la scatola A}\}$, $B = \{\text{ho scelto la scatola B}\}$, $C = \{\text{ho scelto la scatola C}\}$. Abbiamo che

$$p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap B) + p(E \cap C)$$

$$= p(E|A)p(A) + p(E|B)p(B)p(E|C)p(C).$$

Siccome A, B, C sono equiprobabili si deduce che la probabilita' di questi eventi e' $\frac{1}{3}$. Quindi deduciamo, combinando questa informazione e i dati del problema

$$p(E) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{20}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{100} = \frac{35}{3 \times 100} = \frac{7}{60}$$