Analisi 2 Ingegneria Civile $28 - 06 - 2021$

Esercizio 1

Dire, giustificando la risposta, se e' vero o e' falso che esiste $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che:
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}.$$
Dire, giustificando la risposta, se e' vero o e' falso che esiste $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ che soddisfi contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\partial_x f(x,y) \geq \partial_y f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 2 Calcolare il volume del solido Ω ottenuto ruotando intorno all' asse z la regione piana

$$A = \{(y,z) | y \in [0,\pi], 0 < z < y \sin y\}.$$

Esercizio 3 Si lanciano due dati non truccati e si considerano i seguenti eventi:

$$E = \{ \text{ la somma dei dadi fa } 7\}, A = \{ \text{ il primo dado realizza } 4 \},$$

$$B = \{ \text{ il secondo dado realizza } 3 \}.$$

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- E ed A sono indipendenti;
- E e B sono indipendenti;
- A e B sono indipendenti.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Per rispondere al primo punto basta scegliere $f(x,y) = xy$. Per rispondere al secondo punto osserviamo che dalla chain rule abbiamo che, se $\partial_x f \geq \partial_y f$, allora

$$\frac{d}{dt} f(t + t_0, -t) \geq 0$$

per ogni t, t_0. Quindi la funzione f e' crescente se ristretta a qualsiasi retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. Combinando questa informazione con l' ipotesi che la funzione si annulla sugli assi coordinati, si deduce facilmente che sul primo e terzo quadrante f deve essere necessariamente nulla (e quindi l' insieme su cui si annulla e' ben piu' ampio degli assi coordinati). Infatti tutte le rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante (tranne quella passante per l' origine) staccano un segmento i cui estremi giacciono sugli assi e dato che per ipotesi sugli estremi del segmento la f si annulla, allora necessariamente per monotonia sullo stesso segmento si annulla tutta la funzione f.

Esercizio 2

Usiamo Guldino quindi il volume cercato vale:

$$2\pi \int_0^\pi \int_0^{y \sin y} y dy dz = 2\pi \int_0^\pi y^2 \sin y dy = 2\pi[-y^2 cosy]_0^\pi + 2\pi \int_0^\pi 2y \cos y$$

$$= 2\pi^3 + [y \sin y]_0^\pi - 2\pi \int_0^\pi \sin y = 2\pi^3 + 2\pi[\cos y]_0^\pi = 2\pi^3 - 4\pi$$

Esercizio 3

Abbiamo che $E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ quindi $p(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Inoltre, l' evento $A = \{(4,x), x \in \{1,2,3,4,5,6\}$, quindi $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Infine $A \cap B = \{(4,3)\}$ e quindi $p(E \cap A) = \frac{1}{36}$. Pertanto abbiamo che $p(E \cap A) = p(E) \times p(A)$ e quindi E ed A sono indipendenti.
Notiamo anche che $B = \{(x,3), x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ ed $E \cap B = \{(3,4)\}$ quindi $p(B) = \frac{1}{6}$ e $p(E \cap B) = \frac{1}{36}$. Da cui deduciamo $p(E \cap B) = p(E) \times p(B)$ e quindi E ed B sono indipendenti.

Infine osservaimo che $A \cap B = \{(4,3)\}$ quindi $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$ e quindi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ per cui anche A e B sono indipendenti.