Analisi 2, Ingegneria Civile $28-06-2024$

Esercizio 1 Dire se esistono, giustificando la risposta, $\max_A f$ e $\min_A f$ dove $f(x,y)=x^2+y^2$ e

$$A=\{(x,y)|x^4+y^4\leq 1\}.$$

In caso affermativo calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$.

Esercizio 2 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}=(xy,xy,z)$$

lungo la superficie

$$\Sigma=\{(x,y,z)|z=1-x^2-y^2,z\geq 0\}$$

orientata secondo la normale che punta verso l' alto.

Esercizio 3 Risolvere il seguente problema di Cauchy al variare di $y_0\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'=e^{x-y} \\ y(0)=y_0. \end{cases}$$

Dedurre che:
- se $y_0\geq 0$ allora la relativa soluzione e' definita su tutta la retta $\mathbb{R}$;
- se $y_0<0$ allora la relativa soluzione non e' definita su tutta la retta $\mathbb{R}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il massimo e il minimo esistono per il teorema di Weiestrass. Infatti f e' ovviamente continua. Il fatto che A sia chiuso deriva dal fatto che $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$ e' continua e quindi l' insieme dei punti in cui g assume valori minori o uguali a zero e' un chiuso. Per verificare che tale insieme e' limitato basta osservare che $x^4 + y^4 \leq 1$ implica $x^4 \leq 1$ ed $y^4 \leq 1$ da cui $|x| \leq 1$ ed $|y| \leq 1$ quindi A e' contenuto nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$. Passiamo ora al calcolo dei valori di max e min. L' unico punto critico della funzione f e' il punto $(0,0)$ che e' interno ad A e dove f vale 0. Studiamo ora f sul bordo ∂A ed usiamo i moltiplicatori di Lagrange sul vincolo $\{(x,y)|x^4 + y^4 = 1\}$ Impostiamo il primo sistema di Lagrange

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

che non ha soluzioni. Impostiamo quindi il secondo sistema di Lagrange

$$\begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 2y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $x = 0$ oppure $2\lambda x^2 = 1$. Quindi se $x = 0$ dalla terza equazione ricaviamo $y = \pm 1$ e quindi troviamo i punti $(0, \pm 1)$, dove f vale 1. Dalla seconda equazione troviamo $y = 0$ oppure $2\lambda y^2 = 1$. Quindi se $y = 0$ allora dalla terza equazione ricaviamo $x = \pm 1$ e quindi troviamo i punti $(\pm 1, 0)$, dove f vale 1. Siamo quindi rimasti nel caso in cui $2\lambda x^2 = 1$, $2\lambda y^2 = 1$ da cui necessariamente $\lambda \neq 0$ e quindi $x^2 = y^2 = \frac{1}{2\lambda}$. Usando $x^2 = y^2$ nella terza equazione troviamo $2x^4 = 1$ e quindi $x = \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$. Pertanto i punti trovati sono $(\pm \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}, \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}})$ dove la funzione f vale $\sqrt{2}$. Riassumendo dobbiamo fare un confronto tra tutti i valori trovait sopra sia interni che sul bordo: $0, 1, \sqrt{2}$. Quindi il massimo vale $\sqrt{2}$ ed il minimo vale 0.

Esercizio 2 La superficie Σ non e' chiusa ma la possiamo chiudere aggiungendo il tappo $C = \{(x,y,0)|x^2 + y^2 \leq 1\}$. Quindi abbiamo per il teorema della divergenza che il flusso cercato e' uguale a

$$Flusso(\vec{F},\Sigma,\nu) = \int\int\int_{\Omega}(x+y+1)dxdydz - Flusso(\vec{F},C,(0,0,-1))$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$$

Sul tappo C abbiamo $\vec{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1) = (xy,xy,0)\cdot(0,0,-1) = 0$ e quindi

$$Flusso(\vec{F},C,(0,0,-1)) = 0.$$

Pertanto basta calcolare

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1}\int_0^{1-x^2-y^2}(x+y+1)dxdydz$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1}(1+x+y)(1-x^2-y^2)dxdydz$$

Per simmetria abbiamo che

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1}(x+y)(1-x^2-y^2)dxdy = 0$$

e quindi resta solo da calcolare

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)dxdy = \pi - \int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^3 d\rho d\theta = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 3 L' equazione e' a variabili separabili, quindi scriviamo la soluzione del problema di Cauchy usando la formula data a lezione:

$$\int_{y_0}^{y(x)} e^s ds = \int_0^x e^s ds$$

ossia $e^{y(x)} - e^{y_0} = e^x - 1$ e quindi $e^{y(x)} = e^{y_0} + e^x - 1$ da cui

$$y(x) = \ln(e^{y_0} + e^x - 1).$$

Osservaimo che se $y_0 \geq 0$ allora $e^{y_0} + e^x - 1 \geq e^x > 0$ e quindi il dominio di $y(x)$ e' tutta la retta $\mathbb{R}$. Altrimenti nel caso $y_0 < 0$ il dominio di $y(x)$ diventa $\{x \in \mathbb{R}|e^{y_0} + e^x - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}|e^x > 1 - e^{y_0}\}$ e quindi non trovo tutta la retta reale come dominio poiche' se $y_0 < 0$ allora $1 - e^{y_0} > 0$ e quindi valori di x in un intorno di $-\infty$ restano fuori dal dominio.