Secondo Compitino di Analisi 2 del $19-04-2024$

Esercizio 1 Dire se il seguente campo vettoriale e' conservativo ed in caso affermativo calcolarne tutte le primitive:

$$\vec{F}(x,y) = (\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\frac{1}{1+x^2})$$

Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A (x^2+y^2)dxdy$$

dove

$$A = \{(x,y)||x| \leq 2, |y| \leq 2, x^2+2y^2 \geq 2\}$$

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_\Omega \frac{x+2y+3z}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

SOLUZIONI

Esercizio 1

Il campo e' irrotazionale per verifica diretta, quindi essendo definito su R^2, che e' semplicemente conneesso, e' anche conservativo. Calcoliamo una primitiva per integrazione e tutte le altre si otterranno sommando una costante arbitraria. Un metodo per calcolare le primitive e' osservare che se $U(x,y)$ e' una primitiva allora

$$\partial_x U = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \partial_y U = -\frac{1}{1+x^2}.$$

In particolare da

$$\partial_y U = -\frac{1}{1+x^2}$$

deduciamo che

$$U(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + C(x)$$

dove $C(x)$ e' per il momento una qualsiasi funzione di x. Ma imponendo ora che $\partial_x U = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}$ allora per $C(x)$ troviamo $C'(x) + \frac{2xy}{(1+x^2)^2} = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}$ da cui $C'(x) = 0$ e quindi $C(x) = C$. Quindi le primitive hanno la forma

$$U(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Un modo alternativo per arrivare allo stesso risultato e' quello di procedere per integrazione lungo cammini. Infatti la primitiva di $\vec{F}$ che si annulla in $(0,0)$ puo' essere ricavata calcolando

$$\int_{\gamma(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

dove $\gamma(x,y)$ e' il segmentoche congiunge $(0,0)$ con (x,y) quindi abbiamo che

$$\int_{\gamma(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \frac{2t^2x^2y}{(1+t^2x^2)^2} dt - \int_0^1 \frac{y}{1+t^2x^2} dt$$

$$= \frac{2y}{x} \int_0^x \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds - \frac{y}{x} \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds$$

$$= \frac{y}{x} \int_0^x \frac{s^2-1}{(1+s^2)^2} ds = \frac{y}{x} \int_0^x [\frac{1}{1+s^2} - \frac{2}{(1+s^2)^2}] ds$$

$$= \frac{y}{x}[\operatorname{arctg} x - \int_0^x \frac{2}{(1+s^2)^2} ds]$$

$$= \frac{y}{x}[\operatorname{arctg} x - \int_0^x \frac{2}{1+s^2} ds + \int_0^x \frac{2s^2}{(1+s^2)^2} ds]$$

$$= \frac{y}{x}[-\operatorname{arctg} x - \int_0^x (\frac{1}{1+s^2})' s ds]$$

$$= \frac{y}{x}[-\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds] = -\frac{y}{1+x^2}$$

e quindi tutte le primitive si trovano sommando una constante arbitraria

$$U(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2

L'integrale puo' essere svolto per sottrazione:

$$\int\int_Q (x^2+y^2) dxdy - \int\int_E (x^2+y^2) dxdy$$

dove $Q = [-2,2] \times [-2,2]$, $E = \{(x,y) | x^2 + 2y^2 \leq 2\}$. Per calcolare il primo integrale procediamo come segue

$$\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (x^2+y^2) dxdy = \int_{-2}^2 dy [\frac{x^3}{3} + xy^2]_{x=-2}^{x=2}$$

$$= \int_{-2}^2 (\frac{8}{3} + 2y^2 + \frac{8}{3} + 2y^2) dy = \int_{-2}^2 (\frac{16}{3} + 4y^2) dy = \frac{64}{3} + \frac{4}{3}[y^3]_{y=-2}^{y=2} = \frac{128}{3}$$

Per l' integrale su E facciamo prima un cambio di variabili $x = X, \sqrt{2}y = Y$ quindi

$$\int\int_E (x^2+y^2) dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\int_{X^2+Y^2\leq 2} (X^2 + \frac{Y^2}{2}) dXdY$$

che per simmetria e' uguale a

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} \int\int_{X^2+Y^2\leq 2} X^2 dXdY = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2\theta d\rho d\theta = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

Quindi l'integrale assegnato vale

$$\frac{128}{3} - \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

Esercizio 3

Osserviamo che per simmetria

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz = 0$$

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz = 0$$

quindi resta solo da calcolare

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$$

che svolgiamo con le coordinate sferiche:

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz = \int\int\int_{A} 3\rho \cos\varphi \sin\varphi d\varphi d\theta d\rho$$

dove $A = \{(\rho, \theta, \varphi) \in [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]\}$ e quindi l'integrale dato vale 6π.