Analisi 2 Ingegneria Biomedica $15-06-2020$

Si ricorda che allo scadere del tempo (60 minuti) lo studente ha 10 minuti per creare un UNICO file pdf, formato al massimo da DUE FACCIATE di foglio protocollo, da sottomettere tramite il link mandato dal docente.

Domande di cui bisogna consegnare solo la risposta (non lo svolgimento)

Esercizio 1 Calcolare $\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}(0,0)$ dove $f(x,y) = e^{xy}\cos(x^2+y^2)$.

Esercizio 2 Calcolare il flusso del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,z,y)$ attraverso $\partial\Omega$ lungo la normale esterna, dove

$$\Omega = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leq 4, (x-1)^2+y^2+z^2 \geq 1\}.$$

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)-\ln^2(1+xy)}{\ln^2(1+x^2+y^2)}$.

Esercizi di cui bisogna consegnare lo svolgimento

Esercizio 4 Dire (giustificando la risposta) se la seguente funzione e' differenziabile in $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3-xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 5 Calcolare il seguente integrale triplo $\int\int\int_\Omega z dx dy dz$ dove Ω e' il solido ottenuto ruotando intorno all' asse z la seguente regione piana

$$A = \{(y,z) | (y-4)^2+z^2 \leq 1, \quad z \geq 0\}.$$

Soluzioni

1. -2. Infatti Sviluppando con Taylor si trova

$$e^{xy}\cos(x^2+y^2) = (1+xy+\frac{1}{2}x^2y^2+o((x^2+y^2)^2))(1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2)+o((x^2+y^2)^2))$$

Quindi sviluppando i prodotti e inglobando in $o((x^2+y^2)^2)$ tutto cio' che ha ordine superiore a quratto si deduce che il coefficiente del monomio x^2y^2 vale $-\frac{1}{2}$. Da cui la risposta.

2. $\frac{28}{3}\pi$. Per il teorema della divergenza basta integrare su Ω la divergenza del campo $\vec{F}$ che vale 1. Quindi basta calcolare il volume di Ω che corrisponde alla differenza del volume di due palle una contenuta nell' altra di raggi 2 e 1. E quindi il volume vale $\frac{4}{3}\pi(8-1)$.

3. 0. Da analisi uno sappiamo che $\lim_{t\to 0}\frac{\ln^2(1+t)}{t^2} = 1$ e quindi $\lim_{t\to 0}\frac{\ln^2(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 1$. pertanto il limite assegnato equivale al seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^2(xy)-\ln^2(1+xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Sviluppando con Taylor si trova

$$\sin^2(xy) = x^2y^2 + o((x^2+y^2)^2)$$

e

$$\ln^2(1+xy) = x^2y^2 + o((x^2+y^2)^2)$$

da cui il numeratore e' $o((x^2+y^2)^2)$ e quindi il limite assegnato vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

4. Verifichiamo intanto se esiste il gradiente in $(0,0)$. La restrizione della funzione sull' asse delle y e' la funzione nulla quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Invece la restrizione sull' asse x coincide con la funzione $\frac{\sin x^3}{|x|}$ se $x \neq 0$ e vale zero se $x = 0$. La derivata di questa funzione di una variabile in zero vale zero e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Pertanto la differenziabilita' in $(0,0)$ equivale a capire se il seguente limite esiste e vale zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3-xy)}{x^2+y^2}.$$

Sviluppando con Taylor il numeratore siamo ricondotti al limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy}{x^2+y^2} + \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

dove il primo e l' ultimo limite fanno zero e il secondo limite N.E. Quindi il limite N.E. e pertanto la funzione non e' differenziabile in $(0,0)$.

5. Procediamo per sezioni. Per ogni z fissato tale che $0 < z < 1$ la sezione di Ω e' la corona circolare

$$\Omega_z = \{(x,y) | (4 - \sqrt{1-z^2})^2 < x^2 + y^2 < (4 + \sqrt{1-z^2})^2\}$$

e quindi l' integrale dato si riduce a

$$\int_0^1 dz \int_{\Omega_z} z dxdy = \int_0^1 z Area(\Omega_z) dz$$

$$= \pi \int_0^1 z[(4+\sqrt{1-z^2})^2 - (4-\sqrt{1-z^2})^2] = 16\pi \int_0^1 z\sqrt{1-z^2} dz$$

$$= -\frac{16}{3}\pi[(1-z^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{16}{3}\pi$$