Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

12 Giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	○	●
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=275717

PARTE A

1. Sia data la funzione $f(x,y) = \sin(1-\cos^2(xy))$, allora $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0)$ vale
   A: N.A. B: 8 C: 2 D: 4 E: 1

2. L' integrale $\int\int_\Omega e^{x+y} dxdy$ dove
$$\Omega = \{(x,y) | \min\{x,y\} > 0, x < 1, y < x\}$$
   vale
   A: $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{4}$ B: N.A. C: $\frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4}$ D: $\frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}$ E: $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$

3. Il gradiente della funzione $f(x,y) = |\sin(|x||y|)|$ nel punto $(0,0)$ vale
   A: $(0,0)$ B: N.A. C: N.E. D: $(0,1)$ E: $(1,0)$

4. Il gradiente della funzione $f(x,y) = \sqrt{|\sin x|^3 + |y|^4}$ nel punto $(0,0)$ vale
   A: $(-1,0)$ B: $(0,0)$
   C: N.E. D: N.A. E: $(1,0)$

5. L' integrale $\int\int_\Omega x dxdy$ dove
$$\Omega = \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 < 4, x > 0\}$$
   vale:
   A: $\frac{7}{2}$ B: $\frac{13}{3}$ C: $\frac{7}{3}$ D: N.A. E: $\frac{14}{3}$

6. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \sin^2 y}{x^2+y^2}$ vale
   A: N.E. B: N.A. C: 1 D: -1 E: 0

7. L' area della regione
$$\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 > 1, x^2 + \frac{1}{2}y^2 < 1\}$$
   vale
   A: π B: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ C: N.A. D: $\pi(\sqrt{2}-1)$ E: $\sqrt{2}\pi$

8. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^4}{|x|+|y|} \sin(\ln(x^2+y^2))$ vale:
   A: 0 B: $\frac{1}{2}$ C: N.A. D: $+\infty$ E: -1

9. Sia dato nel piano (x,z) il rettangolo $\mathcal{R}$ di vertici $(0,0), (0,1), (2,0), (2,1)$. Il volume della regione ottenuta ruotando $\mathcal{R}$ intorno all' asse z vale:
   A: 6π B: π C: 4π D: N.A. E: 2π

10. Sia data la funzione $f(x,y) = |arctg(x^2 \sin y)|$. Allora il punto $(0,0)$ e':
    A: min assoluto B: max relativo C: N.A. D: max assoluto E: punto di sella

CODICE=275717

SCRITTO ANALISI II BIOMEDICA

DEL 12 GIUGNO 2017

Es. 1 Sia data la funzione $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{|x|+|y|}\,\operatorname{arctg}(|x|+|y|) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione F risulta continua.

Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione F risulta differenziabile.

Es. 2 Sia data la funzione

$$F(x,y)=xy\ln(xy^2)+x^2y.$$

Trovare il dominio di F.

Trovare i punti critici di F che stanno nel dominio.

Studiare la natura dei punti critici, ossia dire se si tratta di min rel., max rel., sella.

Es. 3 Sia dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(e^{z^2}y,\ e^{x^2+z^2},\ z\right)$$

e sia $\Omega=\{(x,y,z)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ 16x^2+y^2\leq 16,\ -1\leq z\leq 1\}$

Calcolare il flusso uscente di $\vec{F}$ lungo $\partial\Omega$, ossia calcolare $\displaystyle\int_{\partial\Omega}(\vec{F}\cdot\nu_{ext})\,d\sigma$ con ν_{ext} normale esterna al bordo di Ω.

Es. 1 È facile osservare che la funzione è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ essendo ottenuta componendo funzioni continue. Resta di studiare l'unico punto delicato che è $(0,0)$.
Quindi dobbiamo vedere se è vero che
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0$. In tal caso la F sarebbe anche continua in $(0,0)$ e quindi continua su $\mathbb{R}^2$.
Osserviamo che usando le polari

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{|x|+|y|} = 0$$

ed essendo $\operatorname{arctg}(|x|+|y|)$ limitata si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0.$$

Studiamo ora la differenziabilità. Osserviamo che se $|x| \neq 0$ e $|y| \neq 0$ allora F è diff. per il teo. del diff. totale. Ad esempio se $x>0$ e $y>0$ allora $F(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x+y} \operatorname{arctg}(x+y)$ e quindi in $x>0$ e $y>0$ possiamo scrivere $\partial_x F$ e $\partial_y F$ che risultano continue, e quindi concludiamo per il diff. totale.

Analogamente se $x<0$ e $y<0$, $x>0$ e $y<0$, $x<0$ e $y>0$.
Restano i casi $|x|=0$ oppure $|y|=0$.

Iniziamo con l'analizzare il punto $(0,0)$.
Abbiamo che $F(x,y)$ è ~~[illegible]~~ data da

$$\frac{x^2}{|x|} \operatorname{arctg} |x|$$

nell'asse delle x e questa funzione è derivabile in 0 con derivata nulla, quindi $\partial_x F(0,0)=0$. Analogamente $\partial_y F(0,0)=0$.
Quindi F è diff in $(0,0)$ se e solo se

$$F(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \text{ossia} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{(|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{arctg}(|x|+|y|) = 0$$

Ma quest'ultimo limite è nullo poiché

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arct}(|x|+|y|)=0$$

ed inoltre $\frac{x^2-y^2}{(|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2}}$ è limitata.

Studiamo ora la differenziabilità in $(x_0,0)$ con $x_0\neq 0$.
Vediamo se esiste $\partial_y F(x_0,0)$ ossia se è derivabile in 0 la funzione

$$y \to \frac{x_0^2-y^2}{|x_0|+|y|} \operatorname{arctg}(|x_0|+|y|)$$

Ma questa funzione di una variabile non è derivabile poiché la sua derivata destra è diversa dalla derivata sinistra. Quindi $\nexists\ \partial_y f(x_0,0)$ se $x_0\neq 0 \Rightarrow$ non è diff.

Con ragionamento simile non è diff. in $(0, y_0)$ se $y_0 \neq 0$

Quindi la F è diff. in $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{matrix} (x,0), x \neq 0 \\ (0,y), y \neq 0 \end{matrix} \right\}$.

<u>Es. 2</u> ~~[illegible]~~ Il dominio di $F(x,y)$

è dato dalla condizione $xy^2 > 0$ ossia $x > 0$ ed $y \neq 0$.

Scriviamo ora ∇F.

$$\partial_x F = y \ln(xy^2) + \frac{xy^3}{xy^2} + 2xy = y \ln(xy^2) + y + 2xy$$

$$\partial_y F = x \ln(xy^2) + \frac{xy2yx}{xy^2} + x^2 = x \ln(xy^2) + 2x + x^2$$

Quindi dobbiamo porre

$$\begin{cases} y \ln(xy^2) + y + 2xy = 0 \\ x \ln(xy^2) + 2x + x^2 = 0 \end{cases}$$

e ricordare $x \neq 0$ ed $y \neq 0$ per le condizioni nel dominio di F

allora possiamo dividere la prima eq. per y e la seconda per x, ottenendo

$$\begin{cases} \ln(xy^2) + 1 + 2x = 0 \\ \ln(xy^2) + 2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + 2x = 2 + x \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

ed inoltre dalla seconda eq. se $x = 1$

$$\ln(y^2) + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \pm e^{-\frac{3}{2}}}$$

Quindi i punti critici sono

$$\boxed{\left(1, \pm e^{-\frac{3}{2}}\right)}.$$

Per studiare la loro natura scriviamo la matrice Hessiana di F.

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} + 2y & \ln(xy^2) + 3 + 2x \\ \ln(xy^2) + 3 + 2x & \frac{2x}{y} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Hf\left(1, \pm e^{-\frac{3}{2}}\right) = \begin{pmatrix} \pm 3e^{-\frac{3}{2}} & 2 \\ 2 & \pm 2e^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

da cui $\left(1, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ è di min loc. e

$\left(1, -e^{-\frac{3}{2}}\right)$ è di max locale.

Es. 3 Per il teo. della divergenza basta calcolare $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$ ossia

$$\iiint_{\Omega} 1 \, dx\,dy\,dz = vol(\Omega).$$

Integrando per fili si trova

$vol(\Omega) = 2 \left(\iint_{A} 1 \, dx\,dy \right)$ dove $A = \{ (x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 16x^2 + y^2 \leq 16 \}$

e quindi $\iint_{A} 1 \, dx\,dy = \frac{1}{4}$ Area (Ellisse $16x^2 + y^2 \leq 16$)

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \pi = \boxed{\frac{\pi}{16}}$$

Quindi riassumendo l'integrale ~~[illegible]~~ dato vale $\boxed{\frac{\pi}{8}}$.