LA VERBALIZZAZIONE
E LA PROVA ORALE
RELATIVE ALL'APPELLO
DEL 07-07-2016
AVRANNO LUOGO
LUNEDI
11 LUGLIO 2016
PRESSO LO STUDIO 210
AL DIP. DI MATEMATICA
ALLE ORE 13.45

RISULTATI SCRITTO ANALISI II
DEL 07-07-2016

SI RIPORTANO DI SEGUITO SOLO I VOTI SUFFICIENTI

1) 534416, 30
2) 503039, 26
3) 533505, 26
4) 507044, 22
5) 531656, 23
6) 537248, 18
7) 495919, 23
8) 531408, 27
9) 533690, 24
10) 530385, 20
11) 521097, 27
12) 517629, 20
13) 532397, 26
14) 516270, 27
15) 502181, 20
16) 456334, 23
17) 531923, 25
18) 533394, 21
19) 530686, 20
20) 519561, 23
21) 509770, 22
22) 505320, 22
23) 477872, 27
24) 535844, 20
25) 536888, 27
26) 519252, 22
27) 520725, 27
28) 494441, 24
29) 517800, 27
30) 521488, 22
31) 438678, 27
32) 519000, 23
33) 537118, 23
34) 516706, 24
35) 518031, 18
36) 507429, 27
37) 503889, 22

~~38)~~

PARTE A

1. Il seguente integrale $\int\int\int_A e^{x+y+z}dxdydz$ dove
$$A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$
vale:
A: N.A. B: e^3 C: $(e-1)^3$ D: $e^3 - e^2$ E: $e^3 - 1$

2. L' integrale
$$\int\int_A e^{x^2+y^2}dxdy$$
dove $A = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ vale
A: $\frac{\pi}{2}e$ B: $\frac{\pi}{2}(e-1)$ C: N.A. D: $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ E: $\frac{\pi}{2}(e-1)^2$

3. Data la funzione $f(x,y) = \sin(xy)$, allora il punto $(0,0)$ e':
A: massimo relativo ma non massimo assoluto B: massimo assoluto C: minimo relativo ma non minimo assoluto D: N.A.
E: minimo assoluto

4. Il limite $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vale:
A: 0 B: 1 C: -1 D: N.A. E: $\frac{1}{2}$

5. Consideriamo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Allora il gradiente di f nel punto $(0,0)$ vale:
A: $(1,0)$ B: $N.E.$ C: N.A. D: $(0,1)$ E: $(0,0)$

6. Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ vale:
A: N.A. B: 0 C: $\frac{1}{3}$ D: $N.E.$ E: $\frac{1}{2}$

7. La seguente derivata
$$\frac{\partial^4}{\partial^3 x \partial y}f(0,0),$$
dove $f(x,y) = \sin(xy)\cos(x+y)$ vale:
A: 2 B: $\frac{3}{4}$ C: -3 D: N.A. E: 0

8. Il flusso del campo $\vec{F} = (xe^z, -ye^z + y, z)$, lungo il bordo la superficie
$$\{(x,y,z)|1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$
orientata secondo la normale esterna, vale:
A: N.A. B: π C: 2π D: 6π E: 4π

9. L' area della regione
$$A = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 4, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$$
vale:
A: 2π B: π C: N.A. D: $\frac{\pi}{2}$ E: 3π

10. L' integrale $\int\int\int_A e^z dxdydz$ con
$$A = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$
vale:
A: $\pi(e-1)$ B: $\frac{\pi}{4}e$ C: N.A. D: $\frac{\pi}{2}e$ E: π

CODICE=051390

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

07 luglio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	○	○	●
10	●	○	○	○	○

CODICE=051390

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x,y) = xy\, e^{x^2 - 2y^2}$$

dire:

1) quali sono i punti critici di f
2) studiare la natura dei punti critici (dire se si tratta di max/min, loc/globali)
3) dire se f ammette max e/o min assoluti su $\mathbb{R}^2$

Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\iint_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\, dS$$ dove Σ è la superficie

definita come segue parametricamente:

$$\Omega \ni (u,v) \xrightarrow{\Phi} (\operatorname{sen}(uv), \cos(uv), u)$$

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \tfrac{1}{2} < u < v,\ v < 1 \right\}$$

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A z\,(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$ dove

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z^2 \ge x^2+y^2,\ z \ge 0 \right\}.$$

SOLUZIONI

Es. 1

Abbiamo

$$\nabla f = \left((y+2x^2y)e^{x^2-2y^2}, (x-4xy^2)e^{x^2-2y^2}\right)$$

e quindi $\nabla f(x,y) = (0,0)$ equivale a

$$\begin{cases} y(1+2x^2)=0 \\ x(1-4y^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

Quindi l'unico punto critico è l'origine $(0,0)$.

Si vede facilmente che $(0,0)$ non è un punto né di max né di min loc. Infatti se scegliamo $y=x$ allora $f(x,x)=x^2e^{-x^2}\geq 0$

e se scegliamo $y=-x$ allora $f(x,-x)=-x^2e^{-x^2}\leq 0$

quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

Si poteva arrivare alla stessa conclusione studiando l'Hessiano di f in $(0,0)$.

Inoltre f non ha max assoluto su $\mathbb{R}^2$ come si vede considerando la restrizione $f(x,\frac{x}{\sqrt{2}})=\frac{x^2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

ed anche $f(x,-\frac{x}{\sqrt{2}})=-\frac{x^2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$.

Es. 2 Iniziamo con il calcolo di $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$:

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ v\cos(uv) & -v\,\mathrm{sen}(uv) & 1 \\ u\cos(uv) & -u\,\mathrm{sen}(uv) & 0 \end{pmatrix} = i\,(u\,\mathrm{sen}(uv)) + j\,(u\cos(uv)) + k\,(\underbrace{-uv\,\mathrm{sen}(uv)\cos(uv) + uv\,\mathrm{sen}(uv)\cos(uv)}_{=0})$$

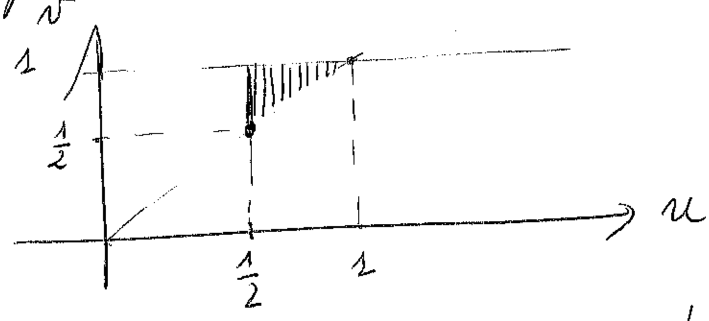
$$= i\,(u\,\mathrm{sen}(uv)) + j\,(u\cos(uv)) + k\,(0)$$

quindi $\left| \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \right| = |u|$.

Quindi l'integrale di superficie diventa:

$$\iint_\Omega \frac{1}{u^3}\,|u|\,du\,dv.$$

Rappresentiamo ora Ω



e quindi $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < u < 1,\ u < v < 1\}$

ed usando le formula di riduzione per integrali doppi ed osservando che $|u| = u$ su Ω (infatti su Ω $u > \frac{1}{2} > 0$!)

$$\iint_\Omega \frac{du\,dv}{u^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{du}{u^2} \left(\int_u^1 dv \right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{du}{u^2}\,(1-u) = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[\ln u\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -1 + 2 - \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{1 + \ln 2}.$$

Es. 3 Osserviamo che Ω può essere descritto come segue:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le \frac{1}{2},\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}$$

quindi integrando per fili siamo ricondotti a:

$$\iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} (x^2+y^2) \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} \frac{(x^2+y^2)}{2} \left[z^2 \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} \frac{x^2+y^2}{2} \left(1-x^2-y^2-x^2-y^2 \right) dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} (x^2+y^2)\left(1-2(x^2+y^2)\right) dx\,dy$$

uso le polari

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^3 (1-2\rho^2)\, d\rho =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4} \left[\rho^4 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{2}{6} \left[\rho^6 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} = \pi \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} \right) = \pi \left(\frac{3-2}{16 \cdot 3} \right) = \frac{\pi}{48}$$