TUTTI COLORO CHE

HANNO SUPERATO
ALGEBRA LINEARE E ANALISI II

POSSONO VERBALIZZARE IL VOTO

LUNEDÌ 1 AGOSTO 2016

ALLE ORE 9.00 PRESSO LO

STUDIO 210 AL DIP.

DI MATEMATICA

ALGEBRA LINEARE

ING. BIOMEDICA

ESAME DEL 29-07-2016

Matricola	Cognome	Nome	
531267	ARMENISE	FRANCESCA	24
534157	DI NASSO	GABRIELE	27
533287	FABBRI	MATILDE	19
521137	FALDUTO	EMANUELE	18
533147	FURFARO	ROCCO	27
533300	GUARINO	MAURO	22
531093	GUERRINI	OTTAVIA	19
539440	IMBRÃ□	ANTONINO	20
538486	LAMONICA	FRANCESCA	20
535634	MATTU	VERONICA	18
536888	MILAZZO	GIUSEPPE	22
533791	MOLEDDA	DALILA	19
531088	PAGNANELLI	GIULIA	24
464996	PALA	LAURA	18

533080	PALMA	FLAVIA	21
534084	PARRA	GIULIA	19
533890	PASQUINI	LORENZO	22
539252	PEGOLLO	GINEVRA	22
536572	PRIFTI	AURORA	25
520156	ROCCHI	BEATRICE	18
533981	ROMEI	MARTINA	19
534214	SARUBBI	CHIARA	18
533972	TOMEI	ROBERTO	27
531929	ZUCCACCIA	BENEDETTA	23

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Dati 15 vettori di $\{x \in \mathbb{R}^9 : \ 3x_1 - \sqrt{3}x_9 = 8x_2 + 2x_8 = 0\}$ che lo generano, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

$\boxed{\text{A}}$ 9 $\boxed{\text{B}}$ 8 $\boxed{\text{C}}$ 7 $\boxed{\text{D}}$ 6 $\boxed{\text{E}}$ 5

2. Date X, Y matrici 3×3 con $\det(X) = -5$ e $\det(Y) = 6$, quanto vale $\det(X \cdot Y \cdot X)$?

$\boxed{\text{A}}$ 150 $\boxed{\text{B}}$ -4 $\boxed{\text{C}}$ -30 $\boxed{\text{D}}$ 6 $\boxed{\text{E}}$ -180

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il sistema $\begin{cases} (t-2)x + ty = 3t - 2 \\ (2t-5)x + (t+2)y = 2t + 7 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni?

$\boxed{\text{A}}$ $t = 4$ $\boxed{\text{B}}$ $t = \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $t = 1$ $\boxed{\text{D}}$ $t = -1$ $\boxed{\text{E}}$ Ogni $t \in \mathbb{R}$

4. Quale equazione cartesiana descrive il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e parallelo a quello generato da $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$?

$\boxed{\text{A}}$ $3x + 2y + 5z = 23$ $\boxed{\text{B}}$ $2x + 3y - 5z = 11$

$\boxed{\text{C}}$ $2x + 3y - 5z = -28$ $\boxed{\text{D}}$ $5x + 3y - 2z = 11$ $\boxed{\text{E}}$ $5x + 3y - 2z = -13$

5. Se in uno spazio V di dimensione 14 sono dati sottospazî X e Y con $X \cap Y = \{0\}$ e X di dimensione 5, cosa si può concludere sulla dimensione di Y?

$\boxed{\text{A}}$ Vale al più 9 $\boxed{\text{B}}$ Vale 9 $\boxed{\text{C}}$ Vale almeno 9 $\boxed{\text{D}}$ Vale 5 $\boxed{\text{E}}$ Vale 0

6. Elencare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

$\boxed{\text{A}}$ $-1, 3, 3$ $\boxed{\text{B}}$ $-1, -1, 3$ $\boxed{\text{C}}$ $-1, 1, -3$ $\boxed{\text{D}}$ $-5, 3, 3$ $\boxed{\text{E}}$ $1, 1, -1$

7. Trovare l'area del parallelogrammo avente per lati $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{29}$ $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{165}$ $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{35}$

8. Data $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ trovare $\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$.

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. Trovare la forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 3xy - xz + 2yz$ $\boxed{\text{B}}$ $2x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

$\boxed{\text{C}}$ $2x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3z^2 + 3xy - xz + 2yz$ $\boxed{\text{D}}$ $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

$\boxed{\text{E}}$ $8x^2 + 10y^2 + 12z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

10. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, qual è il coefficiente di A^{-1} sulla terza riga e la seconda colonna?

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{10}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{10}$ $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{4}{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{4}{5}$ $\boxed{\text{E}}$ 8

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato a 45 minuti dall'inizio della prova. In questo tempo non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Le risposte consegnate vanno trascritte sull'apposito foglio fornito e conservate.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♠

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Promemoria delle risposte fornite ai quesiti (da compilare e conservare)

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♠

Risposte

1. ♡ 4. ♢

1. B

2. A

3. A

4. E

5. A

6. B

7. C

8. E

9. D

10. D

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 6x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 0\}$ e l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 3x_2 + 3x_3 - x_4 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da $\mathbb{R}^2$ a X. Spiegare.

(B) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da X a $\mathbb{R}^2$. Spiegare.

(C) (3 punti) Trovare una base del nucleo di f.

(D) (2 punti) Elencare tutti i vettori di X aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui la prima positiva.

(E) (3 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(F) (3 punti) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ in arrivo.

2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} -k-1 & 3-9k & 2(k+1) \\ k+1 & 6k-2 & -k-1 \\ 5-3k & 6(1-k) & 4(k-1) \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che il determinante di A vale $15k^3 - 19k^2 - 19k + 15$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = -15k^3 + 42k^2 - 24k$ determinare $p_A(t)$.

(C) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $5k - 3$, trovare gli altri due.

(D) (3 punti) Al variare di k elencare gli autovalori di A ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

(E) (3 punti) Determinare per quali k la A non è diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, la cancelleria, il quaderno degli appunti e un libro di testo. Le soluzioni vanno scritte sui fogli protocollo, intestati con nome, cognome e numero di matricola. Si può uscire solo in casi eccezionali. Il tempo a disposizione è di due ore. La brutta non va consegnata, questo foglio sì. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Soluzioni

1.

(A) Iniettive sì perché la dimensione del dominio è minore di quella del codominio, surgettive no per la stessa ragione.

(B) Surgettive sì perché la dimensione del dominio è maggiore di quella del codominio, iniettive no per la stessa ragione.

(C) $\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$

(E) L'ordine è il precedente. Bisogna tenere primo, secondo e quarto vettore.

(F) $\begin{pmatrix} 19 & -8 & -11 \\ 28 & -11 & -17 \end{pmatrix}$

2.

(A) Sostituendo la seconda riga con sé stessa più la prima e poi la prima con sé stessa meno 3 volte la seconda si può portar fuori $k+1$ e si conclude facilmente.

(B) $t^3 - (9k-7)t^2 + (23k^2 - 34k + 7)t - (15k^3 - 19k^2 - 19k + 15)$

(C) $k+1$ e $3k-5$

(D) Per k diverso da $-1, 1, 3$: autovalori $k+1, 3k-5, 5k-3$
Per $k = -1$: autovalori $0, -8, -8$
Per $k = 1$: autovalori $2, 2, -2$
Per $k = 3$: autovalori $4, 4, 12$

(E) $k = 1$

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, qual è il coefficiente di A^{-1} sulla terza riga e la seconda colonna?

[A] $\frac{1}{8}$ [B] $-\frac{1}{8}$ [C] $\frac{1}{32}$ [D] $-\frac{1}{32}$ [E] 4

2. Data $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ trovare $\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$.

[A] $\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ [C] $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ [E] $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Quale equazione cartesiana descrive il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e parallelo a quello generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

[A] $2x + 3y - 7z = 12$ [B] $2x + 3y - 7z = -25$

[C] $3x + 7y - 2z = -12$ [D] $3x + 7y - 2z = 25$ [E] $7x + 2y - 3z = -23$

4. Dati 4 vettori linearmente indipendenti in $\{x \in \mathbb{R}^9 : \ 3x_1 - \sqrt{3}x_9 = 8x_2 + 2x_8 = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

[A] 6 [B] 5 [C] 4 [D] 3 [E] 2

5. Trovare l'area del parallelogrammo avente per lati $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

[A] $\sqrt{29}$ [B] $\sqrt{6}$ [C] $\sqrt{165}$ [D] 3 [E] $\sqrt{35}$

6. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il sistema $\begin{cases} (t-1)x + (t+1)y = 3t+1 \\ (2t-3)x + (t+3)y = 2t+9 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni?

$\boxed{\text{A}}$ $t = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $t = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $t = 3$ $\boxed{\text{D}}$ $t = -2$ $\boxed{\text{E}}$ Ogni $t \in \mathbb{R}$

7. Trovare la forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ $5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy - 3xz + yz$ $\boxed{\text{B}}$ $10x^2 + 8y^2 + 12z^2 + 4xy - 6xz + 2yz$

$\boxed{\text{C}}$ $10x^2 + 8y^2 + 12z^2 + 2xy - 3xz + yz$ $\boxed{\text{D}}$ $5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + xy - \frac{3}{2}xz + \frac{1}{2}yz$

$\boxed{\text{E}}$ $5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy - 6xz + 2yz$

8. Se in uno spazio V di dimensione 13 sono dati sottospazî X e Y con $X + Y = V$ e X di dimensione 5, cosa si può concludere sulla dimensione di Y?

$\boxed{\text{A}}$ Vale 5 $\boxed{\text{B}}$ Vale 13 $\boxed{\text{C}}$ Vale al più 8 $\boxed{\text{D}}$ Vale 8 $\boxed{\text{E}}$ Vale almeno 8

9. Date X, Y matrici 3×3 con $\det(X) = -5$ e $\det(Y) = 6$, quanto vale $\det(X \cdot Y \cdot X)$?

$\boxed{\text{A}}$ 150 $\boxed{\text{B}}$ -4 $\boxed{\text{C}}$ -30 $\boxed{\text{D}}$ 6 $\boxed{\text{E}}$ -180

10. Elencare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

$\boxed{\text{A}}$ $-1, 3, 3$ $\boxed{\text{B}}$ $-1, -1, 3$ $\boxed{\text{C}}$ $-1, 1, -3$ $\boxed{\text{D}}$ $-5, 3, 3$ $\boxed{\text{E}}$ $1, 1, -1$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato a 45 minuti dall'inizio della prova. In questo tempo non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Le risposte consegnate vanno trascritte sull'apposito foglio fornito e conservate.

1. ♡ 2. ◇ 3. ♠ 4. ♠ 5. ♣

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 4x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 0\}$ e l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da X a $\mathbb{R}^2$. Spiegare.

(B) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da $\mathbb{R}^2$ a X. Spiegare.

(C) (3 punti) Trovare una base del nucleo di f.

(D) (2 punti) Elencare tutti i vettori di X aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui la prima positiva.

(E) (3 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(F) (3 punti) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ in arrivo.

2. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & k-19 & -k-1 \\ k+1 & k+7 & 0 \\ -2k-2 & -k-11 & 2(k-1) \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che il determinante di A vale $-3k^3 + 25k^2 - 53k + 15$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = 3k^3 - 26k^2 + 64k - 32$ determinare $p_A(t)$.

(C) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $k - 3$, trovare gli altri due.

(D) (3 punti) Al variare di k elencare gli autovalori di A ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

(E) (3 punti) Determinare per quali k la A non è diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, la cancelleria, il quaderno degli appunti e un libro di testo. Le soluzioni vanno scritte sui fogli protocollo, intestati con nome, cognome e numero di matricola. Si può uscire solo in casi eccezionali. Il tempo a disposizione è di due ore. La brutta non va consegnata, questo foglio sì. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Promemoria delle risposte fornite ai quesiti (da compilare e conservare)

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

1. ♡ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♠ 5. ♣

Risposte

1. ♡ 4. ♠

1. A

2. E

3. B

4. D

5. C

6. C

7. E

8. E

9. A

10. B

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

Soluzioni

1.

(A) Surgettive sì perché la dimensione del dominio è maggiore di quella del codominio, iniettive no per la stessa ragione.

(B) Iniettive sì perché la dimensione del dominio è minore di quella del codominio, surgettive no per la stessa ragione.

(C) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

(E) L'ordine è il precedente. Bisogna tenere primo, secondo e quarto vettore.

(F) $\begin{pmatrix} -11 & 28 & 17 \\ -8 & 19 & 11 \end{pmatrix}$

2.

(A) Sostituendo la seconda riga con sé stessa più 2 volte la terza e poi la seconda colonna con sé stessa meno 5 volte la prima più la terza si conclude facilmente.

(B) $t^3 - t^2(3k+1) - t(k^2 - 14k + 17) + 3k^3 - 25k^2 + 53k - 15$

(C) $5 - k$ e $3k - 1$

(D) Per k diverso da $-1, \frac{3}{2}, 4$: autovalori $k-3, 5-k, 3k-1$
Per $k = -1$: autovalori $-4, -4, 6$
Per $k = \frac{3}{2}$: autovalori $-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}$
Per $k = 4$: autovalori $1, 1, 11$

(E) $k = \frac{3}{2}, 4$

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Nome ____________ Cognome ____________ Matricola ______

1. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il sistema $\begin{cases} (t-1)x + (t+1)y = 3t+1 \\ (2t-3)x + (t+3)y = 2t+9 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni?

[A] $t = 0$ [B] $t = \frac{1}{2}$ [C] $t = 3$ [D] $t = -2$ [E] Ogni $t \in \mathbb{R}$

2. Elencare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

[A] $1, 1, 1$ [B] $-1, 1, 4$ [C] $-1, 2, 2$ [D] $-2, 1, 2$ [E] $-1, -1, 5$

3. Date X, Y matrici 4×4 con $\det(X) = 4$ e $\det(Y) = -7$, quanto vale $\det(X \cdot Y \cdot X)$?

[A] 1 [B] 196 [C] -112 [D] -28 [E] 56

4. Trovare la forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

[A] $5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy - 3xz + yz$ [B] $10x^2 + 8y^2 + 12z^2 + 4xy - 6xz + 2yz$

[C] $10x^2 + 8y^2 + 12z^2 + 2xy - 3xz + yz$ [D] $5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + xy - \frac{3}{2}xz + \frac{1}{2}yz$

[E] $5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy - 6xz + 2yz$

5. Quale equazione cartesiana descrive il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e parallelo a quello generato da $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$?

[A] $3x + 2y + 5z = 23$ [B] $2x + 3y - 5z = 11$

[C] $2x + 3y - 5z = -28$ [D] $5x + 3y - 2z = 11$ [E] $5x + 3y - 2z = -13$

6. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, qual è il coefficiente di A^{-1} sulla terza riga e la seconda colonna?

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{10}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{10}$ $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{4}{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{4}{5}$ $\boxed{\text{E}}$ 8

7. Trovare l'area del parallelogrammo avente per lati $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{35}$ $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$ 6 $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{41}$ $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{174}$

8. Dati 15 vettori di $\{x \in \mathbb{R}^9 : \ 3x_1 - \sqrt{3}x_9 = 8x_2 + 2x_8 = 0\}$ che lo generano, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

$\boxed{\text{A}}$ 9 $\boxed{\text{B}}$ 8 $\boxed{\text{C}}$ 7 $\boxed{\text{D}}$ 6 $\boxed{\text{E}}$ 5

9. Se in uno spazio V di dimensione 14 sono dati sottospazî X e Y con $X \cap Y = \{0\}$ e X di dimensione 5, cosa si può concludere sulla dimensione di Y?

$\boxed{\text{A}}$ Vale al più 9 $\boxed{\text{B}}$ Vale 9 $\boxed{\text{C}}$ Vale almeno 9 $\boxed{\text{D}}$ Vale 5 $\boxed{\text{E}}$ Vale 0

10. Data $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ trovare $\left[\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$.

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix}$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato a 45 minuti dall'inizio della prova. In questo tempo non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Le risposte consegnate vanno trascritte sull'apposito foglio fornito e conservate.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} -k-1 & 3-9k & 2(k+1) \\ k+1 & 6k-2 & -k-1 \\ 5-3k & 6(1-k) & 4(k-1) \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che il determinante di A vale $15k^3 - 19k^2 - 19k + 15$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = -15k^3 + 42k^2 - 24k$ determinare $p_A(t)$.

(C) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $5k - 3$, trovare gli altri due.

(D) (3 punti) Al variare di k elencare gli autovalori di A ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

(E) (3 punti) Determinare per quali k la A non è diagonalizzabile.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 4x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 0\}$ e l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da X a $\mathbb{R}^2$. Spiegare.

(B) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da $\mathbb{R}^2$ a X. Spiegare.

(C) (3 punti) Trovare una base del nucleo di f.

(D) (2 punti) Elencare tutti i vettori di X aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui la prima positiva.

(E) (3 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(F) (3 punti) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ in arrivo.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, la cancelleria, il quaderno degli appunti e un libro di testo. Le soluzioni vanno scritte sui fogli protocollo, intestati con nome, cognome e numero di matricola. Si può uscire solo in casi eccezionali. Il tempo a disposizione è di due ore. La brutta non va consegnata, questo foglio sì. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Promemoria delle risposte fornite ai quesiti (da compilare e conservare)

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

1. ♠ 2. ♢ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡

Risposte

1. ♠ 4. ♣

1. C

2. C

3. C

4. E

5. E

6. D

7. E

8. B

9. A

10. B

Soluzioni

1.

(A) Sostituendo la seconda riga con sé stessa più la prima e poi la prima con sé stessa meno 3 volte la seconda si può portar fuori $k+1$ e si conclude facilmente.

(B) $t^3 - (9k-7)t^2 + (23k^2 - 34k + 7)t - (15k^3 - 19k^2 - 19k + 15)$

(C) $k+1$ e $3k-5$

(D) Per k diverso da $-1, 1, 3$: autovalori $k+1, 3k-5, 5k-3$
Per $k=-1$: autovalori $0, -8, -8$
Per $k=1$: autovalori $2, 2, -2$
Per $k=3$: autovalori $4, 4, 12$

(E) $k=1$

2.

(A) Surgettive sì perché la dimensione del dominio è maggiore di quella del codominio, iniettive no per la stessa ragione.

(B) Iniettive sì perché la dimensione del dominio è minore di quella del codominio, surgettive no per la stessa ragione.

(C) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

(E) L'ordine è il precedente. Bisogna tenere primo, secondo e quarto vettore.

(F) $\begin{pmatrix} -11 & 28 & 17 \\ -8 & 19 & 11 \end{pmatrix}$

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Nome ____________ Cognome ____________ Matricola _ _ _ _ _ _

1. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, qual è il coefficiente di A^{-1} sulla terza riga e la seconda colonna?

[A] $-\frac{1}{10}$ [B] $\frac{1}{10}$ [C] $-\frac{4}{5}$ [D] $\frac{4}{5}$ [E] 8

2. Trovare la forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

[A] $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 3xy - xz + 2yz$ [B] $2x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

[C] $2x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3z^2 + 3xy - xz + 2yz$ [D] $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

[E] $8x^2 + 10y^2 + 12z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il sistema $\begin{cases} (t-2)x + ty = 3t - 2 \\ (2t-5)x + (t+2)y = 2t + 7 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni?

[A] $t = 4$ [B] $t = \frac{3}{2}$ [C] $t = 1$ [D] $t = -1$ [E] Ogni $t \in \mathbb{R}$

4. Data $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ trovare $\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$.

[A] $\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ [C] $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ [E] $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. Elencare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

[A] $-1, 3, 3$ [B] $-1, -1, 3$ [C] $-1, 1, -3$ [D] $-5, 3, 3$ [E] $1, 1, -1$

6. Dati 4 vettori linearmente indipendenti in $\{x \in \mathbb{R}^9 : 3x_1 - \sqrt{3}x_9 = 8x_2 + 2x_8 = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

$\boxed{A}$ 6 $\boxed{B}$ 5 $\boxed{C}$ 4 $\boxed{D}$ 3 $\boxed{E}$ 2

7. Quale equazione cartesiana descrive il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e parallelo a quello generato da $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$?

$\boxed{A}$ $3x + 2y + 5z = 23$ $\boxed{B}$ $2x + 3y - 5z = 11$

$\boxed{C}$ $2x + 3y - 5z = -28$ $\boxed{D}$ $5x + 3y - 2z = 11$ $\boxed{E}$ $5x + 3y - 2z = -13$

8. Date X, Y matrici 3×3 con $\det(X) = -5$ e $\det(Y) = 6$, quanto vale $\det(X \cdot Y \cdot X)$?

$\boxed{A}$ 150 $\boxed{B}$ -4 $\boxed{C}$ -30 $\boxed{D}$ 6 $\boxed{E}$ -180

9. Trovare l'area del parallelogrammo avente per lati $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{A}$ $\sqrt{29}$ $\boxed{B}$ $\sqrt{6}$ $\boxed{C}$ $\sqrt{165}$ $\boxed{D}$ 3 $\boxed{E}$ $\sqrt{35}$

10. Se in uno spazio V di dimensione 14 sono dati sottospazî X e Y con $X \cap Y = \{0\}$ e X di dimensione 5, cosa si può concludere sulla dimensione di Y?

$\boxed{A}$ Vale al più 9 $\boxed{B}$ Vale 9 $\boxed{C}$ Vale almeno 9 $\boxed{D}$ Vale 5 $\boxed{E}$ Vale 0

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato a 45 minuti dall'inizio della prova. In questo tempo non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Le risposte consegnate vanno trascritte sull'apposito foglio fornito e conservate.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & k-19 & -k-1 \\ k+1 & k+7 & 0 \\ -2k-2 & -k-11 & 2(k-1) \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che il determinante di A vale $-3k^3 + 25k^2 - 53k + 15$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = 3k^3 - 26k^2 + 64k - 32$ determinare $p_A(t)$.

(C) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $k-3$, trovare gli altri due.

(D) (3 punti) Al variare di k elencare gli autovalori di A ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

(E) (3 punti) Determinare per quali k la A non è diagonalizzabile.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 6x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 0\}$ e l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 3x_2 + 3x_3 - x_4 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da $\mathbb{R}^2$ a X. Spiegare.

(B) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da X a $\mathbb{R}^2$. Spiegare.

(C) (3 punti) Trovare una base del nucleo di f.

(D) (2 punti) Elencare tutti i vettori di X aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui la prima positiva.

(E) (3 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(F) (3 punti) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ in arrivo.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, la cancelleria, il quaderno degli appunti e un libro di testo. Le soluzioni vanno scritte sui fogli protocollo, intestati con nome, cognome e numero di matricola. Si può uscire solo in casi eccezionali. Il tempo a disposizione è di due ore. La brutta non va consegnata, questo foglio sì. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Promemoria delle risposte fornite ai quesiti (da compilare e conservare)

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Risposte

1. ♠ 4. ♢

1. D

2. D

3. A

4. E

5. B

6. D

7. E

8. A

9. C

10. A

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

Soluzioni

1.

(A) Sostituendo la seconda riga con sé stessa più 2 volte la terza e poi la seconda colonna con sé stessa meno 5 volte la prima più la terza si conclude facilmente.

(B) $t^3 - t^2(3k+1) - t(k^2 - 14k + 17) + 3k^3 - 25k^2 + 53k - 15$

(C) $5 - k$ e $3k - 1$

(D) Per k diverso da $-1, \frac{3}{2}, 4$: autovalori $k-3, 5-k, 3k-1$
Per $k = -1$: autovalori $-4, -4, 6$
Per $k = \frac{3}{2}$: autovalori $-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}$
Per $k = 4$: autovalori $1, 1, 11$

(E) $k = \frac{3}{2}, 4$

2.

(A) Iniettive sì perché la dimensione del dominio è minore di quella del codominio, surgettive no per la stessa ragione.

(B) Surgettive sì perché la dimensione del dominio è maggiore di quella del codominio, iniettive no per la stessa ragione.

(C) $\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$

(E) L'ordine è il precedente. Bisogna tenere primo, secondo e quarto vettore.

(F) $\begin{pmatrix} 19 & -8 & -11 \\ 28 & -11 & -17 \end{pmatrix}$

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Nome ____________ Cognome ____________ Matricola ______

1. Dati 4 vettori linearmente indipendenti in $\{x \in \mathbb{R}^9 : 3x_1 - \sqrt{3}x_9 = 8x_2 + 2x_8 = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

[A] 6 [B] 5 [C] 4 [D] 3 [E] 2

2. Date X, Y matrici 4×4 con $\det(X) = 4$ e $\det(Y) = -7$, quanto vale $\det(X \cdot Y \cdot X)$?

[A] 1 [B] 196 [C] −112 [D] −28 [E] 56

3. Elencare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

[A] $1, 1, 1$ [B] $-1, 1, 4$ [C] $-1, 2, 2$ [D] $-2, 1, 2$ [E] $-1, -1, 5$

4. Se in uno spazio V di dimensione 14 sono dati sottospazî X e Y con $X \cap Y = \{0\}$ e X di dimensione 5, cosa si può concludere sulla dimensione di Y?

[A] Vale al più 9 [B] Vale 9 [C] Vale almeno 9 [D] Vale 5 [E] Vale 0

5. Trovare l'area del parallelogrammo avente per lati $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

[A] $\sqrt{35}$ [B] $\sqrt{6}$ [C] 6 [D] $\sqrt{41}$ [E] $\sqrt{174}$

6. Trovare la forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

[A] $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 3xy - xz + 2yz$ [B] $2x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

[C] $2x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3z^2 + 3xy - xz + 2yz$ [D] $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

[E] $8x^2 + 10y^2 + 12z^2 + 6xy - 2xz + 4yz$

7. Data $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ trovare $\left[\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$.

[A] $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ [C] $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ [E] $\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix}$

8. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, qual è il coefficiente di A^{-1} sulla terza riga e la seconda colonna?

[A] $\frac{1}{8}$ [B] $-\frac{1}{8}$ [C] $\frac{1}{32}$ [D] $-\frac{1}{32}$ [E] 4

9. Quale equazione cartesiana descrive il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

e parallelo a quello generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

[A] $2x + 3y - 7z = 12$ [B] $2x + 3y - 7z = -25$

[C] $3x + 7y - 2z = -12$ [D] $3x + 7y - 2z = 25$ [E] $7x + 2y - 3z = -23$

10. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il sistema $\begin{cases} (t-1)x + (t+1)y = 3t + 1 \\ (2t-3)x + (t+3)y = 2t + 9 \end{cases}$ ammette infinite soluzioni?

[A] $t = 0$ [B] $t = \frac{1}{2}$ [C] $t = 3$ [D] $t = -2$ [E] Ogni $t \in \mathbb{R}$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato a 45 minuti dall'inizio della prova. In questo tempo non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Le risposte consegnate vanno trascritte sull'apposito foglio fornito e conservate.

1. ♠ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♡ 5. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} -k-1 & 3-9k & 2(k+1) \\ k+1 & 6k-2 & -k-1 \\ 5-3k & 6(1-k) & 4(k-1) \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che il determinante di A vale $15k^3 - 19k^2 - 19k + 15$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = -15k^3 + 42k^2 - 24k$ determinare $p_A(t)$.

(C) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $5k-3$, trovare gli altri due.

(D) (3 punti) Al variare di k elencare gli autovalori di A ripetuti con la loro molteplicità algebrica.

(E) (3 punti) Determinare per quali k la A non è diagonalizzabile.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 4x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 0\}$ e l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da X a $\mathbb{R}^2$. Spiegare.

(B) (2 punti) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da $\mathbb{R}^2$ a X. Spiegare.

(C) (3 punti) Trovare una base del nucleo di f.

(D) (2 punti) Elencare tutti i vettori di X aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui la prima positiva.

(E) (3 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(F) (3 punti) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ in arrivo.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Biomedica

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Quesiti

Promemoria delle risposte fornite ai quesiti (da compilare e conservare)

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

1. ♠ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♡ 5. ♢

Risposte

1. ♠ 4. ♡

1. D

2. C

3. C

4. A

5. E

6. D

7. B

8. A

9. B

10. C

Algebra Lineare — Scritto del 28/7/16 — Esercizî

Soluzioni

1.

(A) Sostituendo la seconda riga con sé stessa più la prima e poi la prima con sé stessa meno 3 volte la seconda si può portar fuori $k+1$ e si conclude facilmente.

(B) $t^3-(9k-7)t^2+(23k^2-34k+7)t-(15k^3-19k^2-19k+15)$

(C) $k+1$ e $3k-5$

(D) Per k diverso da $-1,1,3$: autovalori $k+1, 3k-5, 5k-3$
Per $k=-1$: autovalori $0,-8,-8$
Per $k=1$: autovalori $2,2,-2$
Per $k=3$: autovalori $4,4,12$

(E) $k=1$

2.

(A) Surgettive sì perché la dimensione del dominio è maggiore di quella del codominio, iniettive no per la stessa ragione.

(B) Iniettive sì perché la dimensione del dominio è minore di quella del codominio, surgettive no per la stessa ragione.

(C) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

(E) L'ordine è il precedente. Bisogna tenere primo, secondo e quarto vettore.

(F) $\begin{pmatrix} -11 & 28 & 17 \\ -8 & 19 & 11 \end{pmatrix}$