Esercizio 1. Si consideri la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t - t^2, \sin(2\pi t)) \qquad \forall t \in [0,1].$$

(a) Verificare che γ è una curva semplice e chiusa.

(b) Calcolare l'area della parte di piano delimitata da γ.

a) Osserviamo che $\gamma(0) = (0,0) = \gamma(1)$, quindi γ è chiusa.

Supponiamo ora che esistano $t_1, t_2 \in [0,1]$ con $t_1 < t_2$ per cui $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, cioè

$$\begin{cases} t_1 - t_1^2 = t_2 - t_2^2 \\ \sin(2\pi t_1) = \sin(2\pi t_2) \end{cases} \Rightarrow t_1^2 - t_1 + \frac{1}{4} = t_2^2 - t_2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(t_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(t_2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

Quindi abbiamo due casi: $t_1 - \frac{1}{2} = t_2 - \frac{1}{2}$, da cui $t_1 = t_2$, oppure $t_1 - \frac{1}{2} = -\left(t_2 - \frac{1}{2}\right)$, da cui $t_2 = 1 - t_1$

Il primo caso contraddice che $t_1 < t_2$, quindi rimane da studiare solo il caso in cui $t_2 = 1 - t_1$. In questo caso la seconda equazione diventa $\sin(2\pi t_1) = \sin(2\pi - 2\pi t_1)$.

Dato che $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$, otteniamo che $\sin(2\pi t_1) = -\sin(2\pi t_1)$, quindi $\sin(2\pi t_1) = 0 \Rightarrow t_1 \in \{0, 1/2, 1\}$.

Se $t_1 = 0$, abbiamo $t_2 = 1$, se $t_1 = \frac{1}{2}$ abbiamo $t_2 = 1/2$ e se $t_1 = 1$, abbiamo $t_2 = 0$.

Quindi $\begin{cases} \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \\ t_1 < t_2 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0$ e $t_2 = 1$, che sono gli estremi, quindi γ è semplice.

b) Sia Ω la parte di piano delimitata da γ, e sia $\vec{\nu}$ la normale a γ uscente da Ω.

Per il teorema di Gauss-Green, vale che

$$\text{Area}(\Omega) = \text{Flusso}(\vec{F}, \gamma, \vec{\nu})$$

per ogni campo $\vec{F}$ con $\text{div}(\vec{F}) = 1$, quindi ad esempio

$$\text{Area}(\Omega) = \text{Flusso}((0,y), \gamma, \vec{\nu}).$$

Per calcolare $\vec{\nu}$, calcoliamo $\gamma'(t) = (1-2t, 2\pi\cos(2\pi t))$,
quindi $\vec{\nu} = \pm(2\pi\cos(2\pi t), 2t-1)/\|\gamma'(t)\|$, dove il segno va scelto in modo che $\vec{\nu}$ risulti uscente da Ω.

Osserviamo ora che $t - t^2 = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ $\forall t \in [0,1]$,
e quindi γ è contenuta nel semipiano $\{x \leq \frac{1}{4}\}$, e di conseguenza anche $\Omega \subseteq \{x \leq 1/4\}$.

Quindi, dato che $\gamma(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, 0)$, necessariamente $\nu(1/2)$ deve avere $\nu_1(1/2) > 0$, e quindi, dato che $\cos(2\pi \cdot \frac{1}{2}) = -1$, dobbiamo scegliere il segno $-$,
per cui $\vec{\nu} = (-2\pi \cdot \cos(2\pi t), 1-2t)/\|\gamma'(t)\|$.

Possiamo ora calcolare

$$\text{Area}(\Omega) = \text{Flusso}((0,y), \gamma, \vec{\nu}) = \int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \frac{(1-2t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$= \int_0^1 (1-2t)\sin(2\pi t)\, dt \underset{\text{per parti}}{=} \left[-(1-2t)\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 (-2) \cdot \left(-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - 2\left[\frac{\sin(2\pi t)}{(2\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - 0 = \frac{1}{\pi}.$$

Esercizio 2. Calcolare
$$\int_\Sigma y\,dS,$$
dove Σ è la superficie parametrizzata da
$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\le u\le v\le 1\}\ni(u,v)\mapsto r(u,v)=(u^2,v,u^2+v^3).$$

Calcoliamo innanzitutto

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u,v)=(2u,0,2u)\ ,\quad \frac{\partial r}{\partial v}=(0,1,3v^2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=(-2u,-6uv^2,2u),$$

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right\|=\sqrt{4u^2+36u^2v^4+4u^2}=\sqrt{8u^2+36u^2v^4}=2|u|\sqrt{2+9v^4}$$

Quindi, per definizione,

$$\int_\Sigma y\,dS=\iint_{\{0\le u\le v\le 1\}} v\cdot 2\underbrace{u}_{u\ge 0\Rightarrow|u|=u}\sqrt{2+9v^4}\,du\,dv=\int_0^1 dv\int_0^v du\ u\cdot 2v\sqrt{2+9v^4}$$

$$=\int_0^1 dv\ 2v\sqrt{2+9v^4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=0}^{u=v}=\int_0^1 v^3\sqrt{2+9v^4}\,dv$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{36}\int_0^1\frac{3}{2}\cdot 36v^3(2+9v^4)^{1/2}dv=\frac{1}{54}\left[(2+9v^4)^{3/2}\right]_0^1$$

$$=\frac{11^{3/2}-2^{3/2}}{54}.$$

Esercizio 3. Calcolare il flusso del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (y\sin(z), xe^{x^2+z^2}, e^z),$$

lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

orientato secondo la normale uscente da Ω.

Per il teorema di Gauss-Green, vale che

$$\text{Flusso}(\vec{F}, \partial\Omega, \vec{\nu}_{\text{uscente}}) = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{\Omega} e^z\, dx\,dy\,dz.$$

Calcoliamo l'integrale triplo per sezioni:

$$\int_{-1}^{1} dz \iint_{\{z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}} dx\,dy\, e^z = \int_{-1}^{1} dz\, e^z \cdot \text{Area}\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} dz\, e^z \cdot (\pi \cdot 1 - \pi \cdot z^2) = \int_{-1}^{1} \pi(1-z^2)e^z\, dz$$

$$\underset{\text{per parti}}{=} \pi\left[(1-z^2)e^z\right]_{-1}^{1} - \pi\int_{-1}^{1} -2ze^z\, dz = 0 + \pi\int_{-1}^{1} 2ze^z\, dz$$

$$\underset{\text{per parti}}{=} \pi\left[2ze^z\right]_{-1}^{1} - 2\pi\int_{-1}^{1} e^z\, dz = 2\pi e + \frac{2\pi}{e} - 2\pi e + \frac{2\pi}{e} = \frac{4\pi}{e}$$