Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Analisi Matematica 2

14 Gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | | | | |
| 2 | X | | | | |
| 3 | | | | X | |
| 4 | X | | | | |
| 5 | X | | | | |
| 6 | | | | X | |
| 7 | X | | | | |
| 8 | | X | | | |
| 9 | X | | | | |
| 10 | | X | | | |

CODICE=162311

## PARTE A

1. Data la funzione $f(x,y) = e^{\sin^2(x+y)}$, allora $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial^2 y}(0,0)$ vale
   A: 4 B: 0 C: N.A. D: 2 E: 3

2. Sia data la funzione $f(x,y) = \ln y - \ln x$. Allora il massimo di $f(x,y)$ su
$$K = \{(x,y)| \min\{x,y\} > 0, x \geq y\}$$
   vale:
   A: 0 B: N.A. C: 1 D: $-1$ E: N.E.

3. Sia data la funzione $f(x,y) = |\cos x \cos y - \sin x \sin y|$ allora il gradiente $\nabla f(0,0)$ vale
   A: N.A. B: N.E. C: $(1,1)$ D: $(0,0)$ E: $(1,0)$

4. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^4(x^2+y^2)}{\sin(x^4+y^4)}$ vale
   A: N.E. B: $-1$ C: 1 D: N.A. E: 0

5. Il seguente integrale
$$\int\int\int_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$
   dove $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 1, x\cdot y \cdot z < 0\}$ vale
   A: $\frac{2\pi}{5}$ B: $\frac{2\pi}{4}$ C: $\frac{2\pi}{3}$ D: N.A. E: $\frac{2\pi}{6}$

6. Il seguente integrale
$$\int\int_{\Omega} \max\{|x|,|y|\}dxdy$$
   con
$$\Omega = \{(x,y)| \max\{|x|,|y|\} < 1, x \cdot y < 0\}$$
   vale:
   A: $\frac{8}{3}$ B: N.A. C: 2 D: $\frac{4}{3}$ E: 4

7. Il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^{|xy|}-1)}{e^{x^2+y^2}-1}$$
   vale
   A: N.E. B: 1 C: $\frac{1}{2}$ D: 0 E: N.A.

8. L'integrale
$$\int\int_{\Omega} \min\{|x|,|y|\}dxdy$$
   dove dove $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1, y > x > 0\}$ vale:
   A: $2-\sqrt{2}$ B: $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ C: $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$ D: N.A. E: $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

9. Sia
$$\Omega = \{(x,y)|2x^2+3y^2 \leq 1, x\cdot y < 0, x > 0\}$$
   allora $Area(\Omega)$ vale
   A: $\frac{\pi}{4\sqrt{6}}$ B: $\frac{\pi}{3\sqrt{6}}$ C: $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ D: $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ E: N.A.

10. Il seguente limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x^2+y^2}})}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}$ vale:
   A: N.A. B: 0 C: 1 D: $\frac{1}{2}$ E: N.E.

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
(A.A. 2018/2019)

**Prova scritta del 14 Gennaio 2019**

Cognome:______________________________________ ,
Nome:__________________________________________

Matricola:________________________________

**Esercizio 1**
Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_\Omega |y - \sin x| dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y)|0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1\}$.

**Esercizio 2**
Sia data la curva $[0,\pi] \ni t \to (\sin t, \sin(2t))$, calcolare l'area della regione racchiusa da tale curva.

**Esercizio 3**
Calcolare $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$$

e $K$ e' il triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,1)$.

## Esercizio 1

L'integrale si spezza come segue

$$\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (-y+\sin x)dy + \int_0^\pi dx \int_{\sin x}^1 (y-\sin x)dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin x)^2 dx + \int_0^\pi (\sin x)^2 dx + \int_0^\pi (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\sin x)^2)dx - \int_0^\pi (\sin x - (\sin x)^2)dx$$

$$= \int_0^\pi (\sin x)^2 dx + \frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2$$

## Esercizio 2

Per G-G abbiamo che $Area = |\oint_\gamma y dx| = |\int_0^\pi \sin 2t \cos t dt| = |\frac{2}{3}[(\cos t)^3]_0^\pi| = \frac{4}{3}$

## Esercizio 3

Da facili conti si vede che il gradiente di $f$ non si annulla nel dominio $K$. Quindi max e min sono sulla frontiera che studiamo per parametrizzazione introducendo i tre lati $L_1, L_2, L_3$ del triangolo ($L_1$ da $(1,1)$ a $(2,1)$, $L_2$ da $(1,1)$ a $(2,2)$, $L_3$ da $(2,1)$ a $(2,2)$). Allora $f$ ristretta ad $L_1$ diventa $\frac{t^2+1}{1+t^2} = 1$ e quindi max e min su $L_1$ valgono 1. Invece $f$ ristretta ad $L_3$ diventa $\frac{t+4}{4+t^2}$ che ammette max 1 e min $\frac{3}{4}$ (questo si vede studiando la derivata che e'negativa su $[1,2]$) Infine $f$ ristretta ad $L_2$ diventa $\frac{t+t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{t})$ che per $t \in [1,2]$ assume max 1 e min $\frac{3}{4}$. Unendo le informazioni trovate si ha min $\frac{3}{4}$ e max 1.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Prova di Algebra Lineare

14 Gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | X | | |
| 2 | | | | | X |
| 3 | X | | | | |
| 4 | | | X | | |
| 5 | | | | | X |
| 6 | X | | | | |
| 7 | X | | | | |
| 8 | | | | | X |
| 9 | X | | | | |
| 10 | | | | | X |

CODICE=777639

## PARTE A

1. Sia data la matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ allora gli autovalori di $A$ sono:
   A: $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ B: $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ C: $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ D: $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ E: N.A.

2. L' insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare
$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 2x+z+3w=0 \end{cases}$$
   gode della seguente proprieta'
   A: dipende da un parametro B: dipende da 3 parametri C: N.A. D: ha un elemento unico E: dipende da 2 parametri

3. Sia $L : R_{\leq 2}[x] \to R_{\leq 2}[x]$ (polinomi della variabile $x$ di grado minore uguale di 2) l' applicazione lineare definita come segue $L(p(x)) = p(x+2)$. Allora gli autovalori di $L$ sono
   A: $(1,1,1)$ B: $(2,2,2)$ C: $(1,1,2)$ D: N.A. E: $(0,1,1)$

4. Siano $V$ e $W$ i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}_{\leq 5}[x]$ (polinomi della variabile $x$ di grado minore uguale di 5)
$$V = span\{x, 1+x^3\}, W = span\{x^3, x^5\}$$
   allora $dim(V \cap W)$ vale
   A: 3 B: 1 C: 0 D: 2 E: N.A.

5. La matrice simmetrica $\left[\begin{smallmatrix} 10 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ gode della seguente proprieta':
   A: e' definita negativa B: N.A. C: e' definita positiva D: $detA = 0$ E: indefinita

6. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l' endomorfismo tale che $L(e_1) = e_1 + e_2, L(e_1+e_2) = e_1 - e_2$, dove $e_1, e_2$ sono la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora gli autovalori di $L$ sono:
   A: $(1,-2)$ B: N.A. C: $(1,2)$ D: $(-1,2)$ E: $(1,-1)$

7. Siano $V = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3 | x+2y-3z=0, x+y+z=0\}$ e $W = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3 | x+2y+z=0\}$ allora $dim(V+W)$ vale
   A: 3 B: 0 C: N.A. D: 2 E: 1

8. Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p'''(0) = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ (polinomi della variabile $x$ di grado minore uguale di 3). Allora $dimW$ vale:
   A: 2 B: 1 C: 4 D: N.A. E: 3

9. Il seguente sottospazio vettoriale delle matrici $3 \times 3$
$$\{A \in Mat(3 \times 3) | a_{11} = a_{22}\}$$
   ha dimensione
   A: 8 B: 6 C: N.A. D: 5 E: 7

10. Sia $V$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito come segue
$$V = span\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]\}$$
    Allora $dimV$ e' uguale a
    A: 3 B: N.A C: 1 D: 0 E: 2

CODICE=777639

# Algebra Lineare - Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (A.A. 2018/2019)

## Prova scritta del 14 Gennaio 2019

Cognome:_________________________________ ,
Nome:___________________________________

Matricola:___________________________

**Esercizio 1**
Sia $L : Mat(2 \times 2) \to Mat(2 \times 2)$ un'applicazione lineare definita come segue:

$$L(E_{11}) = L(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(E_{21}) = L(E_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

dove

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $dim(KerL)$ e $dim(ImL)$.

**Esercizio 2**
Calcolare gli autovalori dell' applicazione lineare $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definita come $L(p(t)) = p'(t) + p(t)$. Dire se $L$ e' diagonalizzabile.

**Esercizio 3** Dire per quali valori di $k$ il seguente sistema non ammette soluzioni, ammette infinite soluzioni oppure ammette una unica soluzione

$$\begin{cases} 3x + 2y + kz = 11 \\ 2x - 6y - 3z = 0 \\ kx + 4y + 2z = 7 \end{cases}$$

**Sol. Esercizio 1** La matrice associata all'operatore $L$ rispetto alla base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ e' la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ogni sottomatrice di ordine $4 \times 4$, $3 \times 3$, oppure $2 \times 2$ ha due colonne uguali oppure una multipla dell'altra e quindi la matrice assegnata ha rango 1. Da cio' deduciamo $dim(ImL) = 1$ e $dim(kerL) = 3$ dove abbiamo usato la fromula $dim(ImL) + dim(kerL) = dim(Mat(2 \times 2) = 4$.

**Sol. Esercizio 2** La matrice associata rispetto alla base canonica $1, t, t^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha come polinomio caratteristico $(\lambda - 1)^3$. Quindi l'unico autovalore e' $\lambda = 1$ con molteplicita' algebrica 3. Tuttavia la molteplicita' geometrica vale 1 essendo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale a 2.

**Sol. Esercizio 3** Sia $A_k$ la matrice dei coefficienti, allora $det(A_k) = 6k^2 + 2k - 8$ che si annulla per $k = 1$ e $k = -\frac{4}{3}$. Quindi per $k \neq 1, -\frac{4}{3}$ esiste una unica soluzione. Studiamo ora $k = 1$ e scriviamo la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

che con mosse elementari si riduce a

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -20 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi abbiamo infinite soluzione. Studiamo ora $k = -\frac{4}{3}$. In questo caso a meno di moltiplicare la prima e la terza equazione per 3 abbiamo la seguente matrice completa

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 & -4 & 33 \\ 2 & -6 & -3 & 0 \\ -4 & 12 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

che con mosse elementari si riduce a

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 & -4 & 33 \\ 0 & -30 & -22 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 63 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema e' impossibile.