**Esercizio 1.** Siano

$$f(x,y) = xy^2 + x \qquad \text{e} \qquad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2y^2 + 2x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Dimostrare che esistono $\min_K f$ e $\max_K f$ e calcolarli esplicitamente.

Osserviamo che K è limitato, in quanto

$$2x^2y^2 + 2x^2 + y^2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 3/2 \\ y^2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow K \subseteq \left[\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right] \times [\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

Dato che K è anche chiuso e f è continua, per il teorema di Weierstrass esistono $\min_K f$ e $\max_K f$.

Per calcolarli cerchiamo per prima cosa i punti critici di f interni a K:

$$\nabla f(x,y) = (y^2+1, 2xy) \rightsquigarrow \begin{cases} y^2+1=0 & \leftarrow \text{IMPOSSIBILE} \\ 2xy=0 \end{cases}$$

Quindi f non ha punti critici.

Studiamo il bordo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

1° sistema
$$\begin{cases} 4xy^2+4x=0 \\ 4x^2y+2y=0 \\ 2x^2y^2+2x^2+y^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x(y^2+1)=0 \\ 2y(2x^2+1)=0 \\ 2x^2y^2+2x^2+y^2=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Nessuna soluzione.

2° sistema
$$\begin{cases} y^2+1=\lambda(4xy^2+4x) \\ 2xy=\lambda(4x^2y+2y) \\ 2x^2y^2+2x^2+y^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2+1=4x\lambda(y^2+1) \\ 2xy=2\lambda y(2x^2+1) \\ 2x^2y^2+2x^2+y^2=3 \end{cases}$$

Osserviamo che se $y=0$ dalla terza equazione otteniamo $2x^2=3$ ($\lambda$ si trova poi dalla prima equazione).
Quindi troviamo i punti $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ e $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$.

Se invece $y\neq 0$, dato che anche $y^2+1\neq 0\ \forall y\in\mathbb{R}$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 1=4x\lambda \\ x=\lambda(2x^2+1) \\ 2x^2y^2+2x^2+y^2=3 \end{cases}$$

Dato che per $x=0$ la prima equazione non ha soluzioni, ricaviamo

$$\begin{cases} \lambda=\frac{1}{4x} \\ 4x^2=2x^2+1 \\ 2x^2y^2+2x^2+y^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda=\frac{1}{4x} \\ 2x^2=1 \\ y^2+1+y^2=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=1/4x \\ x^2=1/2 \\ y^2=1 \end{cases}$$

Quindi troviamo i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)$.
Calcoliamo infine i valori di $f$ nei sei punti trovati:

$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=\sqrt{2}$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=-\sqrt{2}$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)=\sqrt{2}$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)=-\sqrt{2}$

Quindi $\max_K f=\sqrt{2}$ e $\min_K f=-\sqrt{2}$.

**Esercizio 2.** Determinare se il seguente campo vettoriale è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne tutte le primitive:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left( \frac{x}{x^2+y^4+z^6} + z, \frac{2y^3}{x^2+y^4+z^6} - yz^2, x + \frac{3z^5}{x^2+y^4+z^6} - zy^2 \right).$$

Notiamo che $\vec{F}$ e' definito nel dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, che e' semplicemente connesso. Calcolando le derivate parziali si verifica che $\vec{F}$ e' irrotazionale e quindi conservativo.

Una primitiva $U(x,y,z)$ di $\vec{F}$ deve verificare $\nabla U = \vec{F}$, quindi $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^4+z^6} + z$, da cui ricaviamo

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^4+z^6) + xz + c_1(y,z)$$

per qualche funzione $c_1(y,z)$.

Imponiamo ora che $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y^3}{x^2+y^4+z^6} - yz^2$, cioe'

$$\frac{1}{2}\frac{4y^3}{x^2+y^4+z^6} + \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = \frac{2y^3}{x^2+y^4+z^6} - yz^2, \text{ da cui}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = -yz^2, \text{ e quindi } c_1(y,z) = -\frac{1}{2}y^2z^2 + c_2(z),$$

per qualche funzione $c_2(z)$. Ne segue che

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^4+z^6) + xz - \frac{1}{2}y^2z^2 + c_2(z)$$

Imponendo infine la condizione $\frac{\partial U}{\partial z} = x + \frac{3z^5}{x^2+y^4+z^6} - zy^2$ otteniamo che

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{6z^5}{x^2+y^4+z^6}+x-y^2z+C_2'(z)=x+\frac{3z^5}{x^2+y^4+z^6}-zy^2,$$

e quindi $C_2'(z)=0$, cioè $C_2(z)\equiv c\in\mathbb{R}$.

Abbiamo quindi provato che le primitive di $\vec{F}$ sono le funzioni

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^4+z^6)+xz-\frac{1}{2}y^2z^2+c,$$

al variare della costante $c\in\mathbb{R}$.

**Esercizio 3.** Calcolare il flusso del campo

$$\vec{G}(x,y,z) = \left(y^2 z, x^2 y + \arctan(z^2), 2x^2 z - xy^2\right)$$

lungo il bordo dell'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - y^2 - x^2\right\},$$

orientato secondo la normale uscente.

Per il teorema della divergenza, abbiamo che

$$\text{Flusso}(\vec{G}, \Omega, \nu_{\text{uscente}}) = \iiint_\Omega \text{div}(\vec{G})\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_\Omega (x^2 + 2x^2)\, dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega 3x^2\, dx\,dy\,dz$$

Calcoliamo l'integrale triplo "per fili" in direzione $z$.

Osserviamo che $x^2+y^2 \leq 8-y^2-x^2 \iff x^2+y^2 \leq 4$, e quindi

$$\iiint_\Omega 3x^2\, dx\,dy\,dz = \iint_{\{x^2+y^2\leq 4\}} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{8-y^2-x^2} dz\; 3x^2$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2\leq 4\}} 3x^2(8-2x^2-2y^2)\, dx\,dy$$

Calcoliamo l'ultimo integrale doppio usando le coordinate polari:

$$\iint_{\{x^2+y^2\leq 4\}} 3x^2(8-2x^2-2y^2)\, dx\,dy = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\; 3\rho^2\cos^2\vartheta\,(8-2\rho^2)\cdot\rho$$

$$= \int_0^2 d\rho\,(24\rho^3 - 6\rho^5) \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \int_0^2 d\rho\,(24\rho^3-6\rho^5)\cdot\pi$$

$$= \pi\left[6\rho^4 - \rho^6\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = \pi(96-64) = 32\pi.$$