Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

Useremo la notazione seguente :

- $\mathbb{R}^n$ è lo spazio euclideo di dimensione n:
$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \ : \ x_k \in \mathbb{R} \quad \text{per ogni} \quad k = 1, \dots, n\Big\}.$$
- $\mathbb{Q}^n$ è l'insieme dei punti con coordiante razionali in $\mathbb{R}^n$
$$\mathbb{Q}^n = \Big\{(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \ : \ q_k \in \mathbb{Q} \quad \text{per ogni} \quad k = 1, \dots, n\Big\}.$$
- Se x e y sono due punti di $\mathbb{R}^n$ con coordinate
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{e} \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$
allora $x + y$ e $x - y$ sono i punti con coordinate
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \qquad \text{e} \qquad x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$
- Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora definiamo la norma Euclidea $|x|$ come
$$|x| := \Big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2\Big)^{1/2}.$$
- La funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita come
$$d(x, y) = |x - y|,$$
è una distanza su $\mathbb{R}^n$, ovvero valogono le proprietà seguenti:
  (1) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, si ha che $|x - y| \geq 0$. Inoltre, $|x - y| = 0$ se e solo se $x = y$.
  (2) Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, vale la disuguaglianza triangolare
$$|x - y| + |y - z| \geq |x - z|.$$
- Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$, indichiamo con $B_r(x)$ la palla centrata in x di raggio r.
$$B_r(x) := \Big\{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - y| < r\Big\}.$$
- Diciamo che la successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $x_\infty \in \mathbb{R}^n$, se
$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x_\infty| = 0,$$
ossia se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che
$$|x_k - x_\infty| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad k \geq N.$$

Proposizione 1. *L'insieme $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$ ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto con coordinate razionali $q \in \mathbb{Q}^n$ tale che $|x - q| < \varepsilon$.*

Proposizione 2. *Se $x_k \in \mathbb{R}^n$ è una successione che converge a $x_\infty \in \mathbb{R}^n$, allora*
$$\lim_{k \to \infty} |x_k| = |x_\infty|.$$

Le due nozioni di prodotto in $\mathbb{R}^n$.

Per ogni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni numero reale $t \in \mathbb{R}$, definiamo il prodotto $tx \in \mathbb{R}^n$ del vettore x con il numero reale t come

$$tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Inoltre, per ogni

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definiamo il prodotto scalare tra x e y come

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Proposizione 3 (Proprietà del prodotto scalare)**.**

(i) per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

(ii) per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$(tx) \cdot y = x \cdot (ty) = t(x \cdot y);$$

(iii) per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

(iv) per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$x \cdot x = |x|^2.$$

(v) per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2.$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Teorema 4. *Siano*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{e} \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

due punti di $\mathbb{R}^n$. Allora vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|x||y| \geq |x \cdot y|.$$

dove $x \cdot y$ è il prodotto scalare tra x e y.

Dimostrazione: È sufficiente considerare il caso $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Considerare la funzione

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = |x + ty|^2.$$

Calcolare il minimo della funzione su $[0, 1]$. Concludere.

Dimostrazione della disuguaglianza triangolare

Teorema 5. *Siano*

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad e \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

due punti di $\mathbb{R}^n$. *Allora vale la disuguaglianza triangolare*

$$|x| + |y| \geq |x + y|.$$

Dimostrazione: Sviluppare $|x + y|^2$. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, mostrare che $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$.

Esercizi

Esercizio 6. *Siano* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *e* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *due funzioni Riemann integrabili. Dimostrare che*

$$\left| \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 g^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

Esercizio 7. *Siano* x *e* y *due punti di* $\mathbb{R}^n$ *e* $R > r > 0$ *due costanti reali. Mostrare che*

$$\textit{se} \quad |x - y| < R - r\,, \quad \textit{allora} \quad B_r(y) \subset B_R(x)\,.$$