Principali definizioni, formule e teoremi da sapere

Gli enunciati completi si trovano nelle dispense sul sito del corso.
I risultati segnati con ★ sono particolarmente importanti.
Questo elenco contiene soltanto i risultati principali; tutto quello che abbiamo fatto a lezione o si trova sul sito del corso fa parte del programma. Per esempio, l'elenco non include i numeri complessi, ma quasta parte del programma è implicitamente contenuta in diversi punti qui sotto.

---

1. Sommatorie e produttorie

★ Definizioni di $n!$ e di $\binom{n}{k}$.

★ Teorema (Formula di Newton). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

★ Teorema. Per ogni $X \in \mathbb{R}$, $X \neq 1$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}.$$

- Teorema. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Numeri reali. Definizione e proprietà. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore

- Assiomi dei numeri reali.
- Definizioni di insieme limitato superiormente/inferiormente, definizione di maggiornate, minorante. Definizione di massimo e di minimo.
- Teorema: Ogni insieme limitato ammete massimo e minimo.
- Esempio di un isieme limitato superiormente che non ammette un massimo.
- Teorema (Proprietà di Archimede). L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è limitato.
- Teorema: L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

★ Definizione di estremo superiore (sup) e estremo inferiore (inf).

★ Teorema: Ogni insieme limitato superiormente ammette un estremo superiore.

- Valore assoluto (modulo) e distanza. Definizione e proprietà.

3. Successioni

- Definizione. Successione limitata.
- Definizione. Successione limitata definitivamente.
- Teorema. Una successione è limitata se e solo se è limitata definitivamente.

★ Limiti. Definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (con L numero reale), $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

- Teorema. Unicità del limite.
- Teorema. Ogni successione che ammette un limite finito è limitata.

★ Teorema. Ogni successione monotona crescente e limitata superiormente converge.

★ Definizione. Successione di Cauchy.

★ Teorema. Ogni successione di Cauchy converge.

- Teorema della permanenza del segno
- Operazioni con i limiti. Dimostrare le proprietà dei limiti riportati nella tabella qui sotto.

$\lim_{n\to\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} b_n$	$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$	$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a + b$	ab	$\frac{a}{b}$, se $b \neq 0$	$\frac{b}{a}$, se $a \neq 0$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
$a > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	0	$-----$
0	$-\infty$	$-\infty$	$-----$	0	$-----$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$+\infty$	$-\infty$	$------$	$-\infty$	$-----$	$-----$

- Teorema (Teorema di confronto). Se $a_n \leq b_n$ per ogni n, allora $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.
- Teorema (Teorema dei carabinieri). Se $a_n \leq b_n \leq c_n$, per ogni n, e se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, allora b_n converge e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.

★ Teorema (Bolzano-Weierstrass). Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.

4. Serie

- ★ Definizione. Serie convergenti e serie divergenti.
- Teorema. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.
- Teorema. Se le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono e se c è una costante, allora le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} c\, a_n$ convergono.
- Teorema. Criterio di confronto per le serie a termini positivi. Supponiamo che $a_n \geq b_n \geq 0$, per ogni n. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.
  Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.
- Teorema. Una serie a termini non-negativi è necessariamente regolare (converge o diverge).
- ★ Teorema. Criterio del rapporto.
- ★ Teorema. Criterio della radice.
- ★ Teorema. Criterio di Cauchy per le serie.
- ★ Teorema. Criterio di Leibniz. Convergenza delle serie a segni alterni. Dimostrare anche il risultato più generale sulle serie della forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
- Teorema. Criterio del confronto asintotico.
- Teorema. Sia $(a_n)_{n \geq 1}$ una successione monotona decrescente di numeri reali strettamente positivi. Allora, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e soltanto se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$.
- ★ Teorema. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. (Per la dimostrazione serve il punto precedente oppure il teorema sulle serie numeriche e gli integrali improrpi)
- Serie di numeri complessi. Criterio di Cauchy.
- ★ Serie di numeri complessi. Convergenza assoluta. Definizione.
- ★ Serie di numeri complessi. Teorema: Convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza della serie.
- Serie di numeri complessi. Esempio: Trovare una serie (anche di numeri reali) che converge, ma non converge assolutamente.

5. Limiti di funzioni e funzioni continue

★ Definizione di limite.

- Teorema. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ per ogni successione a_n che converge a x_0.
- Teorema della permanenza del segno.
- Teorema. Operazioni con i limiti.

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} (f+g)$	$\lim_{x\to x_0} fg$	$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$	$\lim_{x\to x_0} \frac{g}{f}$
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	ab	$\frac{a}{b}$, se $b \neq 0$	$\frac{b}{a}$, se $a \neq 0$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
$a > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	0	$-----$
0	$-\infty$	$-\infty$	$-----$	0	$-----$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$+\infty$	$-\infty$	$-------$	$-\infty$	$-----$	$-----$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$	$\lim_{x\to +\infty} g(x)$	$\lim_{x\to +\infty} (f+g)$	$\lim_{x\to +\infty} fg$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{f}{g}$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{g}{f}$
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	ab	$\frac{a}{b}$, se $b \neq 0$	$\frac{b}{a}$, se $a \neq 0$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
$a > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	0	$-----$
0	$-\infty$	$-\infty$	$-----$	0	$-----$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$+\infty$	$-\infty$	$-------$	$-\infty$	$-----$	$-----$

★ Definizione. Funzione continue.

- Teorema. Operazioni con funzioni continue. Continuità di $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$.

- Teorema. Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora le funzioni x^n e $x^{1/n}$ sono continue.

★ Teorema degli zeri e teorema del valore intermedio (per funzioni continue su un intervallo).

★ Teorema di Weierstrass.

6. Derivate

★ Definizione. Funzione derivabile in un punto.

- Teorema. Una funzione derivabile in x_0 e anche continua in x_0.

- Teorema. Derivabilità di $f + g$, fg e f/g.

- Teorema. Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora le funzioni x^n e $x^{1/n}$ sono derivabili.

★ Teorema di Rolle

★ Teorema di Lagrange

★ Teorema. Se $f' = 0$ su (a, b), allora f è costante su (a, b).

- Teorema. $f' \geq 0$ su (a, b) se e solo se f è monotona crescente su (a, b).

- Teorema. Se $f' > 0$ su (a, b), allora f è strettamente crescente su (a, b).

6. Composizione di funzioni

- Composizione di due funzioni. Definizione.

- Teorema. Continuità della funzione composta.

★ Teorema. Derivabilità della funzione composta.

7. Teorema della funzione inversa

★ Teorema. Teorema della funzione inversa.

- Definizione di ln, arcsin, arccos, arctan.

8. Regola di de l'Hôpital

- Teoremi di de l'Hôpital.

9. Sviluppi di Taylor

★ Teorema. Formula di Taylor.

★ Definizione di $o(|x|^n)$.

- Esempi. Sviluppi (in zero) di e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$ e $(1 + x)^\alpha$.

- Esempi. Saper trovare gli sviluppi di $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\ln(1 + x)$, $\arctan x$.

10. Esponenziale, seno e coseno

- Teorema. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge. (Segue, per esempio, dal criterio del rapporto per le serie).
- Definizione di e.

★ Teorema. La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge.

★ Teorema. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

★ Teorema. Per ogni numero complesso $X \in \mathbb{C}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}$ converge assolutamente (e quindi converge). Segue dal criterio del rapporto per le serie.

★ Teorema. Definendo $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}$, per ogni numero complesso $X \in \mathbb{C}$, dimostrare che $E(X)E(Y) = E(X+Y)$ per ogni $X, Y \in \mathbb{C}$.

- Teorema (senza dimostrazione). Per ogni numero reale $a > 1$ esiste un'unica funzione monotona crescente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$f(^m/_n) = a^{m/n} \text{ per ogni numero razionale } \tfrac{m}{n}.$$

  Per ogni $x \in \mathbb{R}$, definiamo $a^x = f(x)$.

★ Teorema. Dimostrare che per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ si ha $e^x = E(x)$.

★ Definizione di seno e coseno. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = Re(e^{i\theta})$ e $\sin\theta = Im(e^{i\theta})$.

- Teorema. Le formule per $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$.
- Teorema. Le formule $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, $|e^{i\theta}| = 1$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

★ Teorema. Vale la disuguaglianza $|e^z - 1 - z| \le C|z|^2$ per ogni numero complesso z, $|z| \le 1$.

★ Teorema. La funzione e^x è derivabile e $(e^x)' = e^x$.

★ Teorema. Le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ sono derivabili: $(\cos x)' = -\sin x$ e $(\sin x)' = \cos x$.

★ Teorema. Esiste un'unica funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. ($f(x) = e^x$)

★ Teorema. Esiste un'unica coppia di funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = -g(x)$, $g'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$, $g(0) = 0$. ($f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$)

★ Teorema. Esiste (almeno) un numero reale $a > 0$ tale che $\cos a = 0$.

- Definizione. π è il più piccolo numero reale (strettamente) positivo tale che $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

★ Teorema. $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni 2π-periodiche.

- Teorema. La funzione $X(t) = (\cos t, \sin t)$, $X : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ è iniettiva e surgettiva.
- Teorema (senza dimostrazione). La lunghezza di una curva $X(t) = (x(t), y(t))$, $X : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è data dalla formula $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.
- Teorema. La lunghezza di $\mathbb{S}^1$ è 2π.

11. Integrazione secondo Riemann

- Definizione. Partizione di un intervallo limitato $\mathcal{P}$.
- Definizione. Somme di Riemann superiore $S(\mathcal{P})$ e inferiore $s(\mathcal{P})$.

★ Teorema. Più fine è la partizione, più grande (piccola) e la somma inferiore (superiore).

★ Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann.

- Esempio di una funzione che non è integrabile secondo Riemann.
- Proposizione. Criterio di integrabilità. Una funzione è integrabile se per ogni ε esiste una partizione $\mathcal{P}$ tale che $S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) \leq \varepsilon$.

★ Teorema. Le funzioni monotone sono integrabili.

★ Definizione. Uniforme continuità.

★ Teorema. Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.

★ Teorema. Le funzioni continue sono integrabili.

- Teorema. Se f e g sono integrabilii, allora lo sono anche $f + g$ e Cf, dove C è una costante.
- Teorema. Se f è integrabile, lo è anche $|f|$.
- Teorema. Se $f \leq g$, allora $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

★ Teorema della media.

★ Teorema fondamentrale del calcolo integrale.

★ Definizione. Integrali impropri (convergenti e divergenti) su $[a, +\infty)$.

- Esempi. $\frac{1}{x^p}$.
- Teorema. Criterio del confronto per integrali impropri.
- Teorema. Criterio del confronto asintotico.
- Teorema. Criterio di Cauchy.
- Teorema. Convergenza assoluta per integrali improrpi.
- Teorema. Integrali impropri e serie numeriche.