Integrazione su domini rettangolari in $\mathbb{R}^n$

In questa prima sezione definiremo l'integrale di Riemann di funzioni limitate su domini della forma

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \qquad \text{in} \qquad \mathbb{R}^n \ .$$

La costruzione è generale e funziona in tutte le dimensioni. Per semplicità, ci concentreremo sul caso $n = 2$.

Il dominio e la funzione. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo il rettangolo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Inoltre, sia $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Partizioni. Siano

$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \big\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b\big\}$$
$$\mathcal{P}_{[c,d]} := \big\{c = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = d\big\}$$

due partizioni rispettivamente degli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$. Per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, definiamo il rettangolo

$$\mathcal{R}_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j].$$

Diremo che la famiglia di rettangoli

$$\mathcal{P} := \big\{R_{ij} \ : \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n\big\}$$

è una partizione di $\mathcal{R}$ generata dalle partizioni $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}_{[c,d]}$.

Raffinamenti. Sia $\mathcal{Q}$ un'altra partizione di $\mathcal{R}$ generata da $\mathcal{Q}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q}_{[c,d]}$. Diremo che $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$, se $\mathcal{Q}_{[a,b]}$ è più fine di $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q}_{[c,d]}$ è più fine di $\mathcal{P}_{[c,d]}$.

Le somme di Riemann. Per ogni partizione $\mathcal{P}$ di R definiamo:

- *la somma di Riemann inferiore*

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |R_{ij}| \inf_{(x,y) \in R_{ij}} F(x, y) \ ,$$

- *la somma di Riemann superiore*

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |R_{ij}| \sup_{(x,y) \in R_{ij}} F(x, y) \ ,$$

Dove R_{ij} è l'area (in dimensione più alta, il volume) del rettangolo R_{ij} :

$$R_{ij} = (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}).$$

Il lemma del raffinamento. Come in dimensione uno, il lemma che permette di avere una teoria di integrazione secondo Riemann è il seguente:

Lemma 1 (Lemma del raffinamento)**.**

(i) Per ogni partizione $\mathcal{P}$, $s(\mathcal{P}) \le S(\mathcal{P})$.

(ii) Se $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$, allora

$$s(\mathcal{P}) \le s(\mathcal{Q}) \le S(\mathcal{Q}) \le S(\mathcal{P}).$$

Dimostrazione: Come in dimensione 1. □

Integrabilità secondo Riemann. Per il lemma del raffinamento, abbiamo che per ogni funzione F

$$\sup\Big\{s(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{ partizione di } \ \mathcal{R}\Big\} \le \inf\Big\{S(\mathcal{Q}) \ : \ \mathcal{Q} \ \text{ partizione di } \ \mathcal{R}\Big\}.$$

Diremo che la funzione $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, se

$$\sup\Big\{s(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{ partizione di } \ \mathcal{R}\Big\} = \inf\Big\{S(\mathcal{Q}) \ : \ \mathcal{Q} \ \text{ partizione di } \ \mathcal{R}\Big\}.$$

Se la funzione F risulta integrabile, definiamo

$$\int_{\mathcal{R}} F = \sup\Big\{s(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\} = \inf\Big\{S(\mathcal{Q})\ :\ \mathcal{Q}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\}.$$

In dimensione 2 scriveremo $\int_{\mathcal{R}} F$ come un integrale doppio:

$$\int_{\mathcal{R}} F = \iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Criteri di integrabilità

Lemma 2 (Criterio di integrabilità 1. Il criterio base)**.**
Siano $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione data. Se vale la proprietà seguente:

"Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}$ tale che $S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon$."

allora la funzione F è integrabile.

Dimostrazione: Fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\mathcal{P}$ come sopra. Per il lemma del raffinamento, abbiamo che

$$\inf_{\mathcal{Q}} S(\mathcal{Q}) - \sup_{\mathcal{Q}} s(\mathcal{Q}) \le S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo la tesi. □

Come conseguenza otteniamo:

Lemma 3 (Criterio di integrabilità 2. Il criterio che useremo per le funzioni continue su $\mathcal{R}$)**.**
Siano $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione data. Se vale la proprietà seguente:

"Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\big\{R_{ij}\ :\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\big\}$
tale che per ogni $1 \le i \le m$ ed ogni $1 \le j \le n$ abbiamo che
$F(X) - F(Y) < \varepsilon$ per ogni coppia di punti $X, Y \in R_{ij}$."

allora la funzione F è integrabile.

Dimostrazione: Fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\mathcal{P}$ come sopra. Per il lemma del raffinamento, abbiamo che

$$\inf_{\mathcal{Q}} S(\mathcal{Q}) - \sup_{\mathcal{Q}} s(\mathcal{Q}) \le S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}).$$

Ora, siccome per ogni rettangolo R_{ij}

$$F(X) - F(Y) < \varepsilon \quad \text{per ogni coppia di punti} \quad X, Y \in R_{ij},$$

abbiamo che

$$\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F \le \varepsilon.$$

Di conseguenza,

$$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |R_{ij}|\Big(\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F\Big) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |R_{ij}| = \varepsilon|\mathcal{R}|.$$

In conclusione

$$\inf_{\mathcal{Q}} S(\mathcal{Q}) - \sup_{\mathcal{Q}} s(\mathcal{Q}) \le S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) \le \varepsilon|\mathcal{R}|.$$

□

Lemma 4 (Criterio di integrabilità 3)**.** *Siano $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione data. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione*

$$\mathcal{P} = \big\{R_{ij}\ :\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\big\}$$

che può essere suddivisa in due grupppi di rettangoli $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$:

- *il primo gruppo di rettangoli $\mathcal{P}_1$ ha la proprietà seguente :*

$$F(X) - F(Y) < \varepsilon \quad \textit{per ogni coppia di punti} \quad X, Y \in R_{ij} \quad \textit{e per ogni} \quad R_{ij} \in \mathcal{P}_1\ .$$

- *il secondo gruppo di rettangoli $\mathcal{P}_2$ è tale che*
$$\sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}_2} |R_{ij}| < \varepsilon.$$

Allora la funzione F è integrabile su $\mathcal{R}$.

Dimostrazione: Siccome F è limitata, esiste $M > 0$ tale che
$$|F(X)| \leq M \quad \text{per ogni} \quad X \in \mathcal{R}.$$

Ora, calcoliamo
$$\begin{aligned}
S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) &= \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}} |R_{ij}| \Big(\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F \Big) \\
&= \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}_1} |R_{ij}| \Big(\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F \Big) + \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}_2} |R_{ij}| \Big(\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F \Big) \\
&\leq \varepsilon \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}_1} |R_{ij}| + 2M \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}_2} |R_{ij}| \\
&\leq \varepsilon \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}_1} |R_{ij}| + 2M\varepsilon \\
&\leq \varepsilon \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}} |R_{ij}| + 2M\varepsilon \\
&= \big(|\mathcal{R}| + 2M \big) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Di conseguenza,
$$\inf_{\mathcal{Q}} S(\mathcal{Q}) - \sup_{\mathcal{Q}} s(\mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) \leq \big(|\mathcal{R}| + 2M \big)\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo la tesi. □

Teorema di Cantor

Teorema 5 (Teorema di Cantor in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sia $\mathcal{K}$ un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia $F : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $\mathcal{K}$. Allora, F è uniformemente continua:*

"Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $|X - Y| < \delta$ $(X, Y \in \mathcal{K})$, allora $|F(X) - F(Y)| < \varepsilon$."

Dimostrazione: Come in dimensione 1. Supponiamo, per assurdo, che esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono due punti $X_n \in \mathcal{K}$ e $Y_n \in \mathcal{K}$ tali che
$$|X_n - Y_n| < \frac{1}{n}, \quad \text{ma} \quad |F(X_n) - F(Y_n)| \geq \varepsilon.$$

Siccome $\mathcal{K}$ è compatto esiste una sottosuccessione X_{n_k} di X_n convergente:
$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X_\infty \in \mathcal{K}.$$

Inoltre, abbiamo ancora che
$$|X_{n_k} - Y_{n_k}| < \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad \big|F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})\big| \geq \varepsilon.$$

In particolare, anche la successione Y_{n_k} converge a X_∞. Ora, per la continuità di F si ha
$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} \big|F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})\big| = \big|F(X_\infty) - F(X_\infty)\big| = 0.$$

Assurdo. □

Integrazione di funzioni continue su domini rettangolari

Teorema 6 (Integrabilità delle funzioni continue sui rettangoli)**.** *Siano* $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ *e* $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* F *è integrabile su* $\mathcal{R}$*.*

Dimostrazione: Il teorema di Cantor implica che per ogni ε possiamo trovare una partizione che soddisfa il secondo criterio di integrabilità. □

Lo stesso teorema (con la stessa dimostrazione) vale in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7 (Integrabilità delle funzioni continue su rettangoli in $\mathbb{R}^n$)**.** *Siano*

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* F *è integrabile su* $\mathcal{R}$*.*

Teorema di Fubini

Teorema 8 (Teorema di Fubini su domini rettangolari)**.** *Siano* $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ *e* $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora:*

(a) *la funzione*

$$x \mapsto \int_c^d F(x,y)\,dy\,,$$

è continua (e quindi integrabile) su $[a,b]$ *e abbiamo*

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,dy \right) dx. \tag{1}$$

(b) *la funzione*

$$y \mapsto \int_a^b F(x,y)\,dx\,,$$

è continua (e quindi integrabile) su $[c,d]$ *e abbiamo*

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)\,dx \right) dy.$$

Proof. La continuità della funzione

$$x \mapsto \int_c^d F(x,y)\,dy\,,$$

segue dall'uniforme continuità di F.

Dimostriamo (1). Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per il teorema di Cantor possiamo trovare una partizione

$$\mathcal{P} := \big\{ R_{ij} \;:\; 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \big\}$$

generata da

$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \big\{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b \big\}$$
$$\mathcal{P}_{[c,d]} := \big\{ c = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = d \big\},$$

tale che

$$|F(X) - F(Y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad X, Y \in \mathcal{R}_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j].$$

In particolare,

$$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) \le \varepsilon |\mathcal{R}|.$$

Ora, osserviamo che per la definizione di integrale abbiamo

$$s(\mathcal{P}) \le \iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy \le S(\mathcal{P}).$$

Inoltre, per la definizione delle somme superiori e inferiori

$$s(\mathcal{P}) \le \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}} |R_{ij}|\, F(t_i, s_j) \le S(\mathcal{P}).$$

Quindi

$$\left| \iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy \;-\; \sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}} |R_{ij}|\, F(t_i,s_j) \right| \le \varepsilon. \tag{2}$$

Analogamente, siccome per ogni $x_1, x_2 \in [t_{i-1}, t_i]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d F(x_1,y)\,dy - \int_c^d F(x_2,y)\,dy \right| &= \left| \int_c^d \Big(F(x_1,y) - F(x_2,y) \Big)\,dy \right| \\ &\le \int_c^d \Big| F(x_1,y) - F(x_2,y) \Big|\,dy \le (d-c)\varepsilon, \end{aligned}$$

per le somme parziali di $x \mapsto \displaystyle\int_c^d F(x,y)\,dy$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \max \left\{ \int_c^d F(x,y)\,dy \;:\; x\in[t_{i-1},t_i] \right\} \\ &\qquad - \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \min \left\{ \int_c^d F(x,y)\,dy \;:\; x\in[t_{i-1},t_i] \right\} \le (d-c)\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Ora, ragionando come sopra, osserviamo che

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \min \left\{ \int_c^d F(x,y)\,dy \;:\; x\in[t_{i-1},t_i] \right\} \\ &\qquad \le \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,dy \right) dx \\ &\qquad\qquad \le \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \max \left\{ \int_c^d F(x,y)\,dy \;:\; x\in[t_{i-1},t_i] \right\}. \end{aligned}$$

Inoltre, per la definizione della somma superiore e inferiore, abbiamo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \min \left\{ \int_c^d F(x,y)\,dy \;:\; x\in[t_{i-1},t_i] \right\} \\ &\qquad \le \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \int_c^d F(t_i,y)\,dy \\ &\qquad\qquad \le \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \max \left\{ \int_c^d F(x,y)\,dy \;:\; x\in[t_{i-1},t_i] \right\}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\left| \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,dy \right) dx \;-\; \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \int_c^d F(t_i,y)\,dy \right| \le (d-c)\varepsilon. \tag{3}$$

Ora, per ogni $i = 1, \dots, m$, approssimiamo $\displaystyle\int_c^d F(t_i,y)\,dy$. Infatti, ripetendo lo stesso ragionamento, otteniamo che

$$\left| \int_c^d F(t_i,y)\,dy \;-\; \sum_{j=1}^n (s_j - s_{j-1}) F(t_i,s_j) \right| \le (b-a)\varepsilon.$$

Sommando su $i = 1, \dots, m$, otteniamo

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1})\int_c^d F(t_i, y)\,dy \;-\; \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1})\sum_{j=1}^{n}(s_j - s_{j-1})F(t_i, s_j)\right| \\ \le \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1})\left|\int_c^d F(t_i, y)\,dy \;-\; \sum_{j=1}^{n}(s_j - s_{j-1})F(t_i, s_j)\right| \\ \le \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1})(b-a)\varepsilon = (d-c)(b-a)\varepsilon = |\mathcal{R}|\varepsilon.\end{aligned}$$

Ora, per la disuguaglianza triangolare e (3), abbiamo

$$\left|\int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\,dy\right)dx \;-\; \sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1})\sum_{j=1}^{n}(s_j - s_{j-1})F(t_i, s_j)\right| \le \Big((d-c) + |\mathcal{R}|\Big)\varepsilon. \tag{4}$$

Infine, combinando (4) e (2), otteniamo

$$\left|\int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\,dy\right)dx \;-\; \iint_{\mathcal{R}} F(x, y)\,dx\,dy\right| \le \Big((d-c) + 2|\mathcal{R}|\Big)\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo la tesi. $\square$

La dimostrazione del teorema di Fubini è essenzialmente la stessa in tutte le dimensioni.

Teorema 9 (Teorema di Fubini in $\mathbb{R}^n$)**.** *Siano*

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

un dominio rettangolare e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora:

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\dots\left(\int_{a_n}^{b_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_n\right)\dots\right)dx_2\right)dx_1.$$

Osserviamo che:

- Come in dimensione due, anche in $\mathbb{R}^n$ l'ordine di integrazione a destra non è importante (il risultato è sempre lo stesso). In particolare, abbiamo anche

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\left(\dots\left(\int_{a_1}^{b_1} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\right)\dots\right)dx_{n-1}\right)dx_n.$$

- Nell'espressione a destra, di solito le parentesi vengono omesse. Si scrive semplicemente

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_n \dots dx_2\,dx_1$$

  oppure

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_n.$$

Integrazione su domini limitati in $\mathbb{R}^n$

Definizione 10. *Sia Ω un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che F è integrabile su Ω, se esiste un rettangolo*

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

contenente Ω tale che la funzione

$$G : \mathcal{R} \to \mathbb{R}, \qquad G(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} F(x_1, \dots, x_n) & se \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \\ 0 \quad se \quad (x_1, \dots, x_n) \notin \Omega. \end{cases}$$

sia integrabile su $\mathcal{R}$. In tal caso definiamo

$$\int_\Omega F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathcal{R}} G(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Osserviamo che:

- L'integrabilità di F ed il valore del suo integrale non dipendono dalla scelta del rettangolo $\mathcal{R}$.
- In dimensione due si scrive spesso $\iint_\Omega$ al posto di $\int_\Omega$
- In dimensione due si scrive spesso $\iiint_\Omega$ al posto di $\int_\Omega$
- A volte si scrive anche
$$\int_\Omega F(X)\, dX$$
al posto di
$$\int_\Omega F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \ ;$$
in questo caso è sottinteso che $X = (x_1, \dots, x_n)$ è la variabile in $\mathbb{R}^n$.

Domini normali in $\mathbb{R}^2$

Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad g : [a, b] \to \mathbb{R},$$

due funzioni continue tali che:

$$f(x) \le g(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in [a, b].$$

Definizione 11. L'insieme aperto *normale* determinato dalle funzioni f e g è l'insieme

$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ x \in (a, b),\ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

Il *dominio normale* determinato dalle funzioni f e g è l'insieme chiuso e limitato (quindi compatto)

$$D = \Big\{(x, y) \ : \ x \in [a, b],\ f(x) \le y \le g(x)\Big\}.$$

Proposizione 12 (La parte interna di un dominio normale D)**.** *L'insieme aperto Ω è la parte interna di D.*

Il viceversa è falso. Infatti possiamo trovare un aperto normale Ω tale che $\overline{\Omega} \neq D$.

Esempio 13 ($\overline{\Omega} \neq D$)**.** *Consideriamo l'intervallo $[-1, 1]$ e le funzioni*

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \ \ per\ ogni \ \ x \ ;$$

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & se \ \ x \le 0 \\ x & se \ \ x \ge 0. \end{cases}$$

Allora:

(a) l'insieme aperto Ω *è dato da*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \;:\; 0 < x < 1,\; 0 < y < x\Big\}.$$

(b) la chiusura $\overline{\Omega}$ *è data da*

$$\overline{\Omega} = \Big\{(x,y) \;:\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x\Big\}.$$

(c) il dominio normale D *è dato da*

$$D = \Big\{(x,y) \;:\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x\Big\} \bigcup \Big\{(x,y) \;:\; -1 \le x \le 0,\; y = 0\Big\}.$$

Proposizione 14. *Supponiamo che i grafici di* f *e* g *non si toccano in* (a,b) *ovvero che vale la disuguaglianza*

$$f(x) < g(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in (a,b). \tag{5}$$

Allora:

(i) $\overline{\Omega} = D$;
(ii) Ω *è connesso per archi (segue dalla condizione (5));*
(iii) *i bordi di* Ω *e di* D *coincidono e sono dati da*

$$\begin{aligned}
\partial\Omega = \partial D = &\Big\{(x,y) \;:\; x \in [a,b],\; y = g(x)\Big\} \qquad \text{(il grafico di } g\text{)}\\
&\cup \Big\{(x,y) \;:\; x \in [a,b],\; y = f(x)\Big\} \qquad \text{(il grafico di } f\text{)}\\
&\cup \Big\{(x,y) \;:\; x = a,\; y \in [f(a), g(a)]\Big\} \qquad \text{(il lato verticale sinistro)}\\
&\cup \Big\{(x,y) \;:\; x = b,\; y \in [f(b), g(b)]\Big\} \qquad \text{(il lato verticale destro)}
\end{aligned}$$

Proposizione 15 (Il bordo di un generico dominio normale D)**.** *Il bordo si* D *è dato da*

$$\begin{aligned}
\partial D = &\Big\{(x,y) \;:\; x \in [a,b],\; y = g(x) > f(x)\Big\}\\
&\cup \Big\{(x,y) \;:\; x \in [a,b],\; y = f(x) < g(x)\Big\}\\
&\cup \Big\{(x,y) \;:\; x = a,\; y \in [f(a), g(a)]\Big\}\\
&\cup \Big\{(x,y) \;:\; x = b,\; y \in [f(b), g(b)]\Big\}\\
&\cup \Big\{(x,y) \;:\; x \in [a,b],\; y = f(x) = g(x)\Big\}
\end{aligned}$$

In generale, $\partial D \neq \partial\Omega$.

Integrazione su domini normali in $\mathbb{R}^2$

Teorema 16 (Integrabilità delle funzioni continue sui domini normali)**.** *Siano* $\mathcal{R} = [A,B] \times [C,D] \subset \mathbb{R}^2$ *un rettangolo,* D *un dominio normale contenuto in* $\mathcal{R}$*, e* $F : D \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora:*

- *la funzione* F *è integrabile su* D*;*
- *la funzione* F *è integrabile su* Ω*;*
- $\displaystyle\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy.$

Dimostrazione: Per dimostrare il primo punto consideriamo la funzione

$$G : \mathcal{R} \to \mathbb{R}, \qquad G(x,y) = \begin{cases} F(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \in D \\ 0 \quad \text{se} \quad (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Dimostrereremo che la funzione G è integrabile su $\mathcal{R}$. Infatti, per ogni ε possiamo trovare una partizione che soddisfa il terzo criterio di integrabilità. Vedi gli appunti per la dimostrazione sotto l'ipotesi

$$f(x) < g(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in (a,b).$$

La dimostrazione del secondo punto è analoga. La dimostrazione del terzo punto segue dal fatto che per ogni ε il bordo $\partial D = D \setminus \Omega$ può essere ricoperto da quadratini con misura totale $\leq \varepsilon$. $\square$

Teorema 17 (Teorema di Fubini in domini normali)**.** *Sia*

$$D = \Big\{(x,y) \ : \ x \in [a,b], \ f(x) \leq y \leq g(x)\Big\}$$

un dominio normale determinato dalle funzioni continue

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R},$$

tali che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in [a,b].$$

Sia $F : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la funzione

$$x \mapsto \int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)\, dy\,,$$

è continua (e quindi integrabile) su $[a,b]$ e abbiamo

$$\iint_D F(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)\, dy \right) dx\,.$$

Integrazione su domini normali in $\mathbb{R}^n$

Sia

$$\mathcal{R}' = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_{n-1},b_{n-1}]$$

un rettangolo in $\mathbb{R}^{n-1}$ e siano

$$f : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_{n-1},b_{n-1}] \to \mathbb{R}$$
$$g : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_{n-1},b_{n-1}] \to \mathbb{R}$$

due funzioni continue.

Definizione 18. *Il dominio normale determinato dalle funzioni f e g è l'insieme chiuso e limitato (quindi compatto)*

$$D = \Big\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathcal{R}' \times \mathbb{R} \ : \ f(x_1,\dots,x_{n-1}) \leq x_n \leq g(x_1,\dots,x_{n-1})\Big\}.$$

Teorema 19 (Integrabilità delle funzioni continue sui domini normali)**.** *Siano D un dominio normale in $\mathbb{R}^d$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la funzione F è integrabile su D.*

Teorema 20 (Teorema di Fubini per domini normali)**.** *Sia D il dominio normale definito sopra e sia $F : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la funzione*

$$(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) \mapsto \int_{f(x_1,\dots,x_{n-1})}^{g(x_1,\dots,x_{n-1})} F(x_1,\dots x_{n-1},y)\, dy\,,$$

definita sul rettangolo

$$\mathcal{R}' = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_{n-1},b_{n-1}],$$

è continua (e quindi integrabile) su $\mathcal{R}'$ e abbiamo

$$\int_D F(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{f(x_1,\dots,x_{n-1})}^{g(x_1,\dots,x_{n-1})} F(x_1,\dots x_{n-1},y)\, dy \right) dx_{n-1} \dots dx_1\,.$$

Integrazione per parti - Formule di Gauss-Green

Lemma 21. *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1([a,b])$ e tali che*

$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (a,b).$$

Sia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Allora, la funzione

$$(a,b) \ni x \to \int_{f(x)}^{g(x)} u(x,y)\,dy$$

è derivabile in (a,b) e la sua derivata è :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{f(x)}^{g(x)} u(x,y)\,dy = g'(x)\,u\big(x,g(x)\big) - f'(x)\,u\big(x,f(x)\big) + \int_{f(x)}^{g(x)} \partial_x u(x,y)\,dy.$$

Proof. Siano $x \in (a,b)$ e $h \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo (in modo di avere $x+h \in (a,b)$). Allora

$$\begin{aligned}\int_{f(x+h)}^{g(x+h)} u(x+h,y)\,dy - \int_{f(x)}^{g(x)} u(x,y)\,dy = &\int_{g(x)}^{g(x+h)} u(x+h,y)\,dy \\ &- \int_{f(x)}^{f(x+h)} u(x+h,y)\,dy \\ &+ \int_{f(x)}^{g(x)} \Big(u(x+h,y) - u(x,y)\Big)\,dy\end{aligned}$$

Per il teorema della media abbiamo

$$\int_{g(x)}^{g(x+h)} u(x+h,y)\,dy = \Big(g(x+h) - g(x)\Big)u\big(x+h, g(x)+\kappa_g\big)$$

$$\int_{f(x)}^{f(x+h)} u(x+h,y)\,dy = \Big(f(x+h) - f(x)\Big)u\big(x+h, f(x)+\kappa_f\big)$$

dove

$$|\kappa_g| \le \big|g(x+h) - g(x)\big| \qquad \text{e} \qquad |\kappa_f| \le \big|f(x+h) - f(x)\big|.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\int_{f(x+h)}^{g(x+h)} u(x+h,y)\,dy - \int_{f(x)}^{g(x)} u(x,y)\,dy\right) = &\frac{1}{h}\Big(g(x+h) - g(x)\Big)u\big(x+h, g(x)+k_g\big) \\ &- \frac{1}{h}\Big(f(x+h) - f(x)\Big)u\big(x+h, f(x)+k_f\big) \\ &+ \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{1}{h}\Big(u(x+h,y) - u(x,y)\Big)\,dy\end{aligned}$$

e passando al limite per $h \to 0$ (vedi il lemma "Derivazione sotto il segno dell'integrale"), otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{f(x)}^{g(x)} u(x,y)\,dy = g'(x)\,u\big(x,g(x)\big) - f'(x)\,u\big(x,f(x)\big) + \int_{f(x)}^{g(x)} \partial_x u(x,y)\,dy.$$

□

Teorema 22 (Formule di Gauss-Green)**.** *Sia*

$$D = \Big\{(x,y) \;:\; x \in [a,b],\; f(x) \le y \le g(x)\Big\}$$

il dominio normale determinato dalle funzioni di classe $C^1([a,b])$

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \partial_y u(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \Big(u\big(x,g(x)\big) - u\big(x,f(x)\big)\Big)\,dx$$

$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \partial_x u(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b f'(x)\,u\big(x,f(x)\big)\,dx - \int_a^b g'(x)\,u\big(x,g(x)\big)\,dx$$
$$+ \int_{f(b)}^{g(b)} u(b,y)\,dy - \int_{f(a)}^{g(a)} u(a,y)\,dy$$

Inoltre, le formule di Gauss-Green si possono scrivere nella seguente forma

$$\iint_D \partial_x u(x,y)\,dy\,dx = \int_\gamma u(x,y)\,dy$$
$$\iint_D \partial_y u(x,y)\,dy\,dx = -\int_\gamma u(x,y)\,dx,$$

dove γ è la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo ∂D in senso antiorario.

Teorema della divergenza

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia F il campo vettoriale

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big).$$

La divergenza di F è definita come:

$$\operatorname{div} F(x,y) = \partial_x u(x,y) + \partial_y v(x,y).$$

Più in generale, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed F è un campo vettoriale

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad F(x) = \big(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)\big),$$

allora

$$\operatorname{div} F(x) = \partial_{x_1} F_1(x) + \partial_{x_2} F_2(x) + \dots + \partial_{x_n} F_n(x).$$

Teorema 23 (Teorema della divergenza in domini normali)**.** *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1([a,b])$ e tali che*

$$f(x) < g(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in (a,b),$$

e sia

$$D = \Big\{(x,y)\ :\ x \in [a,b],\ f(x) \le y \le g(x)\Big\}$$

il dominio normale determinato da f e g. Sia F un campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big),$$

di classe C^1. Allora

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} F \cdot \nu_\Omega,$$

dove ν_Ω è il versore (quindi un vettore di norma 1) normale al bordo uscente da Ω. Nel caso specifico, abbiamo che il bordo di Ω ha 4 lati:

$$\begin{aligned}
\partial\Omega = &\Big\{(x,y)\ :\ x \in [a,b],\ y = g(x)\Big\} \qquad \textit{(il grafico di } g\textit{)}\\
&\cup \Big\{(x,y)\ :\ x \in [a,b],\ y = f(x)\Big\} \qquad \textit{(il grafico di } f\textit{)}\\
&\cup \Big\{(x,y)\ :\ x = a,\ y \in [f(a), g(a)]\Big\} \qquad \textit{(il lato verticale sinistro)}\\
&\cup \Big\{(x,y)\ :\ x = b,\ y \in [f(b), g(b)]\Big\} \qquad \textit{(il lato verticale destro)}
\end{aligned}$$

Allora abbiamo:

$$\nu_\Omega(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(-g'(x),1)}{\sqrt{1+(g'(x))^2}} & \textit{sul grafico di } g \\ -\dfrac{(-f'(x),1)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} & \textit{sul grafico di } f \\ (-1,0) & \textit{sul lato verticale sinistro} \\ (1,0) & \textit{sul lato verticale destro.} \end{cases}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \Big(\partial_x u(x,y) + \partial_y v(x,y)\Big)\,dy\,dx \\
&= \int_a^b \Big(v\big(x,g(x)\big) - v\big(x,f(x)\big)\Big)\,dx \\
&\quad + \int_a^b f'(x)\,u\big(x,f(x)\big)\,dx - \int_a^b g'(x)\,u\big(x,g(x)\big)\,dx \\
&\quad + \int_{f(b)}^{g(b)} u(b,y)\,dy \\
&\quad - \int_{f(a)}^{g(a)} u(a,y)\,dy \\
&= \int_a^b \Big(-g'(x)\,u\big(x,g(x)\big) + v\big(x,g(x)\big)\Big)\,dx \\
&\quad - \int_a^b \Big(-f'(x)\,u\big(x,f(x)\big) + v\big(x,f(x)\big)\Big)\,dx \\
&\quad + \int_{f(b)}^{g(b)} u(b,y)\,dy \\
&\quad - \int_{f(a)}^{g(a)} u(a,y)\,dy
\end{aligned}$$

□

Nel seguito dimostreremo il teorema della divergenza in domini con frontiera C^1.

Lemma 24. *Sia*

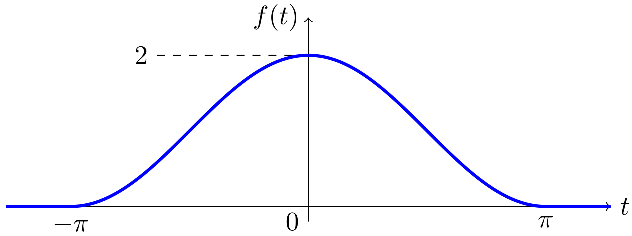
$$\mathcal{R} = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdot \times [a_n,b_n] \to \mathbb{R}$$

un dominio rettangolare in $\mathbb{R}^n$*. Allora esiste una funzione* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tale che:*

- φ *è di classe* C^1 *su* $\mathbb{R}^n$ *(*φ *è continua, differenziabile in ogni punto e le sue derivate parziali sono continue);*
- $\varphi = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}$*;*
- $\varphi > 0$ *in* $\operatorname{int}(\mathcal{R})$.

Proof. Consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \le -\pi \\ 1 + \cos t & \text{se} \quad -\pi \le t \le \pi \\ 0 & \text{se} \quad t \ge \pi \end{cases}$$

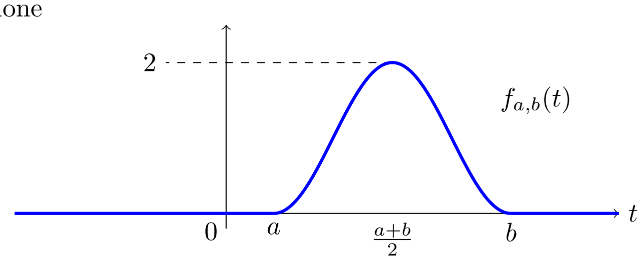


La funzione f è positiva in $(-\pi,\pi)$ e di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Infatti,

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \le -\pi \\ -\sin t & \text{se} \quad -\pi \le t \le \pi \\ 0 & \text{se} \quad t \ge \pi \end{cases}$$

Per ogni coppia di punti $a < b$, consiederiamo la funzione

$$f_{a,b}(t) = f\left(\frac{2\pi}{a+b}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right)$$



La funzione $f_{a,b}$ è positiva in (a,b), zero in $\mathbb{R} \setminus (a,b)$ ed è (come f) di classe C^1 su $\mathbb{R}$.
Definiamo ora φ come il prodotto

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := f_{a_1,b_1}(x_1)\, f_{a_2,b_2}(x_2) \dots f_{a_n,b_n}(x_n).$$

□

Definizione 25. *Diciamo che $D \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio C^1, se D è un compatto e se per ogni punto*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial D,$$

esistono

- *un rettangolo aperto*
$$\mathcal{R}_x = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2) \times \dots \times (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n) \;;$$
- *un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ (assumeremo per semplicità che $i = n$) e una funzione*
$$\eta : (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2) \times \dots \times (x_{n-1} - \delta_{n-1}, x_{n-1} + \delta_{n-1}) \to (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$$
di classe C^1 tale che vale uno dei casi seguenti :

Caso 1.
- *la parte interna di D in $\mathcal{R}$ è data da*
$$\operatorname{int}(D) \cap \mathcal{R}_x = \Big\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_x \;:\; y_n < \eta(y_1, \dots, y_{n-1}) \Big\}$$
- *il bordo di D in $\mathcal{R}$ è dato da*
$$\partial D \cap \mathcal{R}_x = \Big\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_x \;:\; y_n = \eta(y_1, \dots, y_{n-1}) \Big\}.$$

Caso 2.
- *la parte interna di D in $\mathcal{R}$ è data da*
$$\operatorname{int}(D) \cap \mathcal{R}_x = \Big\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_x \;:\; y_n > \eta(y_1, \dots, y_{n-1}) \Big\}$$
- *il bordo di D in $\mathcal{R}$ è dato da*
$$\partial D \cap \mathcal{R}_x = \Big\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_x \;:\; y_n = \eta(y_1, \dots, y_{n-1}) \Big\}$$

Definizione 26. *Sia D un dominio in $\mathbb{R}^n$. Un intorno di D è un aperto che contiene D.*

Teorema 27 (Teorema della divergenza in domini regolari)**.** *Sia D un dominio in $\mathbb{R}^n$ con bordo ∂D di classe C^1. Sia Ω un intorno di D e sia F un campo vettoriale*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big),$$

di classe C^1. Allora

$$\int_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial D} F \cdot \nu_D,$$

dove ν_D è il versore (quindi un vettore di norma 1) normale al bordo uscente da D.

Dimostrazione: Per ogni $x \in D$ esiste un rettangolo aperto $\mathcal{R}_x$ tale che $D \cap \overline{\mathcal{R}}_x$ è un dominio normale. Infatti,

- se x è all'interno di D, $x \in \operatorname{int}(D)$, allora esiste un rettangolo $\mathcal{R}_x$ strettamente contenuto in D; in questo caso
$$\mathcal{R}_x \cap D = \mathcal{R}_x \;;$$
- se x è sul bordo di D, $x \in \partial D$, allora esistono un rettangolo $\mathcal{R}_x$ e una funzione η come in Definizione 25; anche in questo caso $D \cap \mathcal{R}_x$ è normale.

Consideriamo ora la famiglia di rettangoli aperti $\big\{\mathcal{R}_x\big\}_{x \in D}$. Ovviamente $\big\{\mathcal{R}_x\big\}_{x \in D}$ è un ricoprimento di D. Siccome D è compatto esiste un sottricoprimento finito di rettangoli $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_N$. Per ogni rettangolo $\mathcal{R}_i$ consideriamo la funzione φ_i data dal Lemma 24. Consideriamo l'aperto

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{R}_i.$$

Per costruzione, abbiamo che $D \subset \widetilde{\Omega}$ e che

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i > 0 \quad \text{su} \quad \widetilde{\Omega}\ .$$

Per ogni $i = 1, \dots, N$, definiamo la funzione

$$\psi_i : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R} \ , \qquad \psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N}.$$

Allora:

- ψ_i è di classe C^1 si $\widetilde{\Omega}$;
- $\psi_i > 0$ in $\mathcal{R}_i$;
- $\psi_i = 0$ in $\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{R}_i$;
- $\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_N = 1$ in $\widetilde{\Omega}$.

In particolare, per ogni i vale il teorema della divergenza in $\mathcal{R}_i \cap D$. Infatti,

$$\iint_{D\cap\mathcal{R}_i} \operatorname{div}(\psi_i F)\, dx\, dy = \int_{\partial(D\cap\mathcal{R}_i)} (\psi_i F)\cdot \nu_{D\cap\mathcal{R}_i}$$

Siccome $\psi_i = 0$ su $\partial\mathcal{R}_i$, abbiamo che

$$\int_{\partial(D\cap\mathcal{R}_i)} (\psi_i F)\cdot \nu_{D\cap\mathcal{R}_i} = \int_{\partial D\cap\mathcal{R}_i} (\psi_i F)\cdot \nu_{D\cap\mathcal{R}_i} = \int_{\partial D\cap\mathcal{R}_i} (\psi_i F)\cdot \nu_D = \int_{\partial D} (\psi_i F)\cdot \nu_D.$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy &= \int_D \operatorname{div}\Big(F\sum_{i=1}^N \psi_i\Big)\, dx\, dy \\
&= \int_D \operatorname{div}\Big(\sum_{i=1}^N F\psi_i\Big)\, dx\, dy \\
&= \int_D \left(\sum_{i=1}^N \operatorname{div}\big(F\psi_i\big)\right)\, dx\, dy \\
&= \sum_{i=1}^N \int_D \operatorname{div}\big(F\psi_i\big)\, dx\, dy \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{D\cap\mathcal{R}_i} \operatorname{div}\big(F\psi_i\big)\, dx\, dy \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\partial D} \big(F\psi_i\big)\cdot \nu_D \\
&= \int_{\partial D} \left(\sum_{i=1}^N F\psi_i\right)\cdot \nu_D \\
&= \int_{\partial D} F\cdot \nu_D
\end{aligned}$$

□

Osservazione 28. *La famiglia di funzioni $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,N}$ viene spesso chiamata partizione dell'unità.*

Orientazione in $\mathbb{R}^2$

Definizione 29. *Diciamo che la coppia dei vettori $u = (a,b)$ e $v = (A,B)$ è orientata positivamente, se*

$$\det\begin{pmatrix} a & A \\ b & B \end{pmatrix} = aB - bA > 0 \ .$$

Se invece

$$\det\begin{pmatrix} a & A \\ b & B \end{pmatrix} = aB - bA < 0$$

diremo che la coppia di vettori (u, v) è orientata negativamente.

Osservazione 30. *Se la coppia di vettori (u, v) è orientata positivamente, allora la coppia (v, u) è orientata negativamente e viceversa, se (u, v) è orientata negativamente, allora (v, u) è orientata positivamente.*

Osservazione 31 (Determinante e prodotto esterno)**.** *Dati due vettori $u = (a, b)$ e $v = (A, B)$, definiamo le 1-forme (a coefficienti costanti) associate*

$$a\,dx + b\,dy \qquad e \qquad A\,dx + B\,dy.$$

Osserviamo che

$$\Big(a\,dx + b\,dy\Big) \wedge \Big(A\,dx + B\,dy\Big) = \Big(aB - bA\Big)\,dx \wedge dy = \det\begin{pmatrix} a & A \\ b & B \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Osservazione 32 (Determinante e prodotto esterno)**.** *Dati due vettori $u = (a, b)$ e $v = (A, B)$, definiamo le 1-forme (a coefficienti costanti) associate*

$$a\,dx + b\,dy \qquad e \qquad A\,dx + B\,dy.$$

Osserviamo che

$$\Big(a\,dx + b\,dy\Big) \wedge \Big(A\,dx + B\,dy\Big) = \Big(aB - bA\Big)\,dx \wedge dy = \det\begin{pmatrix} a & A \\ b & B \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Definizione 33. *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare (con bordo di classe C^1), (x_0, y_0) un punto del bordo ∂D. Diremo che la curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0), se :*

- *esiste $r > 0$ tale che*
$$\big\{\gamma(t) \;:\; t \in (a, b)\big\} = B_r(x_0, y_0) \cap \partial D.$$
- $|\gamma'(t)| > 0$ *per ogni $t \in (a, b)$.*

Definizione 34. *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare (con bordo di classe C^1), (x_0, y_0) un punto del bordo e sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva che parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0)*

- *Diremo che*
  γ è orientata positivamente (rispetto a D),
  oppure che
  γ parametrizza il bordo di D in senso antiorario,
  se la coppia (versore normale, versore tangente)
$$\Big(\nu_D(\gamma(t))\,,\ \gamma'(t)\Big)$$
  è orientata positivamente per ogni $t \in (a, b)$, dove $\nu_D(\gamma(t))$ è il versore normale uscente da D.
- *Diremo che*
  γ è orientata negativamente (rispetto a D),
  oppure che
  γ parametrizza il bordo di D in senso orario,
  se la coppia (versore normale, versore tangente)
$$\Big(\nu_D(\gamma(t))\,,\ \gamma'(t)\Big)$$
  è orientata negativamente per ogni $t \in (a, b)$, dove $\nu_D(\gamma(t))$ è il versore normale uscente da D.

Esempio 35. *La curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\ , \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

parametrizza il bordo di B_1 in senso antioratio (quindi positivamente risp. a B_1).

Esempio 36. *La curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\ , \quad \gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$$

parametrizza il bordo di B_1 in senso orario (quindi negativamente risp. a B_1).

Esempio 37. *Sia D il dominio $\overline{B}_2 \setminus B_1$. Allora, il bordo di D è dato da*

$$\partial D \;=\; \partial B_2 \,\cup\, \partial B_1.$$

- *La curva*
$$\gamma_{int} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma_{int}(t) = (\cos t, \, \sin t)$$
parametrizza la porzione ∂B_1 del bordo ∂D in senso orario (quindi negativamente risp. a D).
- *La curva*
$$\gamma_{ext} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma_{ext}(t) = (2\cos t, \, 2\sin t)$$
parametrizza la porzione ∂B_2 del bordo ∂D in senso antiorario (quindi positivamente risp. a D).

Osservazione 38 (Curve equivalenti)**.** *Siano*
- *D un dominio C^1 e (x_0, y_0) un punto del bordo ∂D ;*
- *$\gamma : (A, B) \to \mathbb{R}^2$ una curva C^1 tale che*
$$|\gamma'(T)| > 0 \quad \text{per ogni} \quad T \in (A, B) \ ;$$
- *$\alpha : (a, b) \to (A, B)$ una funzione C^1 (derivabile con derivata continua) tale che*
$$\alpha'(t) > 0 \quad \text{per ogni} \quad t \in (A, B) \ ;$$
- *$\sigma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ la curva*
$$\sigma(t) = \gamma(\alpha(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in (a, b) \ .$$

(Ricordiamo che due curve γ e σ con queste proprietà sono *equivalenti.*)

Allora, γ parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0), se e solo se σ parametrizza il bordo ∂D in un intorno di (x_0, y_0). Inoltre,

(i) *γ è orientata positivamente se e solo se σ lo è ;*
(ii) *γ è orientata negativamente se e solo se σ lo è .*

Osservazione 39 (Curve opposte)**.** *Se $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0), allora anche la curva*
$$\gamma_- : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad \gamma_-(t) = \gamma(a + b - t),$$
parametrizza il bordo ∂D in un intorno di (x_0, y_0). Inoltre,

(i) *se γ è orientata positivamente, allora γ_- è orientata negativamente ;*
(ii) *viceversa, se γ è orientata negativamente, allora γ_- è orientata positivamente .*

Formula di Stokes in $\mathbb{R}^2$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia α una 2-forma su Ω
$$\alpha = F(x, y)\, dx \wedge dy.$$
Definiamo
$$\iint_\Omega \alpha := \iint_\Omega F(x, y)\, dx\, dy.$$
Osserviamo che con questa definizione si ha
$$\iint_\Omega F(x, y)\, dy \wedge dx = -\iint_\Omega F(x, y)\, dx \wedge dy \ .$$
Teorema 40 (Formula di Stokes in domini normali)**.** *Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1([a, b])$ e tali che*
$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b),$$
e sia
$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ x \in [a, b], \ f(x) \le y \le g(x)\Big\}$$
il dominio normale determinato da f e g. Sia α una 1-forma di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$
$$\alpha = u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy.$$

Allora

$$\iint_\Omega d\alpha = \int_\gamma \alpha,$$

dove γ è una curva semplice chiusa che parametrizza il bordo $\partial\Omega$ in senso antiorario.

Proof. Prima calcoliamo

$$d\alpha = du \wedge dx + dv \wedge dy = \Big(- \partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)\Big)\, dx \wedge dy$$

Ora, per definizione di integrale di una 2-forma

$$\begin{aligned}\iint_\Omega d\alpha &= \iint_\Omega \Big(- \partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)\Big)\, dx \wedge dy \\ &= \iint_\Omega \Big(- \partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)\Big)\, dx\, dy \\ &= \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \Big(- \partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)\Big)\, dy\, dx \qquad \text{(per il teorema di Fubini)}\end{aligned}$$

Ora, usando le formule di integrazione per parti, abbiamo che

$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \Big(- \partial_y u(x,y)\Big)\, dy\, dx = -\int_a^b \Big(u\big(x, g(x)\big) - u\big(x, f(x)\big)\Big)\, dx$$

e anche

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \partial_x v(x,y)\ dy\, dx = &\int_a^b f'(x)\, v\big(x, f(x)\big)\, dx - \int_a^b g'(x)\, v\big(x, g(x)\big)\, dx \\ &+ \int_{f(b)}^{g(b)} v(b,y)\, dy - \int_{f(a)}^{g(a)} v(a,y)\, dy.\end{aligned}$$

Infine, abbiamo

$$\begin{aligned}\iint_\Omega d\alpha &= \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \Big(- \partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)\Big)\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \Big(- u\big(x, g(x)\big) - g'(x)\, v\big(x, g(x)\big)\Big)\, dx \\ &\quad + \int_a^b \Big(u\big(x, f(x)\big) + f'(x)\, v\big(x, f(x)\big)\Big)\, dx \\ &\quad + \int_{f(b)}^{g(b)} v(b,y)\, dy - \int_{f(a)}^{g(a)} v(a,y)\, dy.\end{aligned}$$

Per concludere, osserviamo che la somma degli integrali a destra è esattamente $\displaystyle\int_\gamma \alpha$. □

Teorema 41 (Formula di Stokes in domini regolari)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^2$ con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1. Sia α una 1-forma di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$, $\alpha = u(x,y)\, dx + v(x,y)\, dy$. Allora*

$$\iint_\Omega d\alpha = \int_{\partial\Omega^+} \alpha.$$

Dimostrazione. Per esercizio. Vedi la dimostrazione del teorema della divergenza in domini regolari. □

Osservazione 42. *Siccome Ω è C^1, is suo bordo può essere parametrizzato da un numero finito di curve semplici chiuse e C^1 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Inoltre, possiamo supporre che tutte le curve γ_i sono orientate in senso antiorario. In particolare, per ogni 1-forma α, possiamo definire l'integrale*

$$\int_{\partial\Omega^+} \alpha := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha\ .$$

Orientazione e diffeomorfismi

Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi di $\mathbb{R}^2$ e sia $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo C^1, ovvero :

- la mappa $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ è di classe C^1 ;
- $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ è bigettiva ;
- la sua inversa $\Psi : \Omega_2 \to \Omega_1$ è di classe C^1 .

Lemma 43. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi in $\mathbb{R}^2$ e sia $\Phi = (u, v) : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo C^1. Allora*

$$\det(D\Phi) := \det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} > 0 \quad \textit{dappertutto in} \quad \Omega_1 ,$$

oppure

$$\det(D\Phi) := \det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} < 0 \quad \textit{dappertutto in} \quad \Omega_1 .$$

Dimostrazione: Sia $\Psi = (f, g) : \Omega_2 \to \Omega_1$ l'inversa di Φ, ovvero f e g sono tali che

$$\begin{cases} f\big(u(x,y), v(x,y)\big) = x \\ g\big(u(x,y), v(x,y)\big) = y \end{cases}$$

per ogni punto $(x, y) \in \Omega_1$. Allora, derivando in x e in y abbiamo

$$\partial_x\big[f\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 1 \qquad \partial_y\big[f\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 0$$
$$\partial_x\big[g\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 0 \qquad \partial_y\big[g\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 1$$

che possiamo scrivere come

$$\partial_x u\, \partial_u f(u,v) + \partial_x v\, \partial_v f(u,v) = 1 \qquad \partial_y u\, \partial_u f(u,v) + \partial_y v\, \partial_v f(u,v) = 0$$
$$\partial_x u\, \partial_u g(u,v) + \partial_x v\, \partial_v g(u,v) = 0 \qquad \partial_y u\, \partial_u g(u,v) + \partial_y v\, \partial_v g(u,v) = 1$$

In particolare,

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 - 0\cdot 0 &= \Big(\partial_x u\, \partial_u f(u,v) + \partial_x v\, \partial_v f(u,v)\Big)\Big(\partial_y u\, \partial_u g(u,v) + \partial_y v\, \partial_v g(u,v)\Big) \\ &\quad - \Big(\partial_y u\, \partial_u f(u,v) + \partial_y v\, \partial_v f(u,v)\Big)\Big(\partial_x u\, \partial_u g(u,v) + \partial_x v\, \partial_v g(u,v)\Big) \\ &= \Big(\partial_x u\, \partial_u f(u,v)\, \partial_y v\, \partial_v g(u,v) + \partial_x v\, \partial_v f(u,v)\, \partial_y u\, \partial_u g(u,v)\Big) \\ &\quad - \Big(\partial_y u\, \partial_u f(u,v)\, \partial_x v\, \partial_v g(u,v) + \partial_y v\, \partial_v f(u,v)\, \partial_x u\, \partial_u g(u,v)\Big) \\ &= \det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \partial_u f(u,v) & \partial_v f(u,v) \\ \partial_u g(u,v) & \partial_v g(u,v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il che vuol dire che

$$\det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

non si annula mai su Ω_1. Di conseguenza (siccome Ω_1 è connesso per archi!) la funzione

$$(x, y) \mapsto \det\begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}$$

non cambia segno in Ω_1 $\square$

Definizione 44. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi di $\mathbb{R}^2$ e sia $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo C^1.*

- *Se* $\det(D\Phi) > 0$ *diremo che Φ preserva l'orientazione ;*
- *Se* $\det(D\Phi) < 0$ *diremo che Φ rovescia l'orientazione .*

Dimostreremo iul seguente teorema

Teorema 45. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi in $\mathbb{R}^2$ e sia $\Phi = (u, v) : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo C^1. Inoltre, siano*

- *D un dominio di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$*

- *$\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 che parametrizza il bordo ∂D in senso orario in un intorno del punto $\gamma(0) = (x_0, y_0) \in \partial D$.*

Allora $\Phi(D)$ è un dominio di classe C^1 e il suo bordo è parametrizzato dalla curva $\Phi \circ \gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ in un intorno del punto $\Phi(x_0, y_0)$. Inoltre,

(i) se Φ preserva l'orientazione, ovvero

$$\det(D\Phi) = \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} > 0 \quad in \quad \Omega_1 \ ,$$

allora la curva $\Phi \circ \gamma$ è orientata positivamente ;

(ii) se invece Φ rovescia l'orientazione, ovvero

$$\det(D\Phi) = \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} < 0 \quad in \quad \Omega_1 \ ,$$

allora la curva $\Phi \circ \gamma$ è orientata negativamente .

Per dimostrare il teorema useremo il seguente semplice (ma utile) lemma.

Lemma 46. *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio di classe C^1 e $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 tale che :*

- *$|\gamma'(t)| > 0$ per ogni $t \in (a,b)$;*
- *γ parametrizza il bordo di D in un intorno del punto $\gamma(t_0) := (x_0, y_0) \in \partial D$.*

Supponiamo che esiste una curva $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ tale che:

- *$|\sigma'(0)| > 0$;*
- *$\sigma(0) = (x_0, y_0) \in \partial D$;*
- *$\sigma(t) \in \mathrm{int}(D)$ quando $t < 0$;*
- *$\sigma(t) \notin D$ quando $t > 0$.*

Allora sono vere le affermazioni seguenti.

(i) Se la coppia di vettori $\big(\sigma'(0)\,,\,\gamma'(t_0)\big)$ è orientata positivamente, allora la curva γ è orientata positivamente (rsip. a D) in un intorno di (x_0, y_0).

(ii) Se la coppia di vettori $\big(\sigma'(0)\,,\,\gamma'(t_0)\big)$ è orientata negativamente, allora la curva γ è orientata negativamente (rsip. a D) in un intorno di (x_0, y_0).

Dimostrazione del teorema: Sia $\nu = (a,b)$ il versore normale a ∂D uscente da D. Consideriamo la curva

$$\sigma(t) = (x_0, y_0) + t\nu.$$

Ricordiamo che

- $\sigma(t) \in \mathrm{int}(D)$ se $t < 0$;
- $\sigma(t) \in \mathbb{R}^d \setminus D$ se $t > 0$.

Allora anche la curva

$$\Phi(\sigma(t)) = \big(u(x_0 + ta, y_0 + tb)\,,\, v(x_0 + ta, y_0 + tb)\big)$$

è tale che

- $\Phi(\sigma(t)) \in \mathrm{int}(\Phi(D))$ se $t < 0$;
- $\Phi(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^d \setminus \Phi(D)$ se $t > 0$.

Ora, calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi(\sigma(t)) = \Big(a\,\partial_x u + b\,\partial_y u\,,\, a\,\partial_x v + b\,\partial_y v\Big)$$

e, scrivendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi(\gamma(t)) = \Big(x'(0)\,\partial_x u + y'(0)\,\partial_y u\,,\, x'(0)\,\partial_x v + y'(0)\,\partial_y v\Big)$$

dove tutte le derivate parziali $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_x v$, $\partial_y v$ sono calcolate nel punto $\gamma(0) = \sigma(0) = (x_0, y_0)$. Ora calcoliamo

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a\,\partial_x u + b\,\partial_y u & a\,\partial_x v + b\,\partial_y v \\ x'(0)\,\partial_x u + y'(0)\,\partial_y u & x'(0)\,\partial_x v + y'(0)\,\partial_y v \end{pmatrix} &= \Big(a\,\partial_x u + b\,\partial_y u\Big)\Big(x'(0)\,\partial_x v + y'(0)\,\partial_y v\Big) \\
&\quad - \Big(a\,\partial_x v + b\,\partial_y v\Big)\Big(x'(0)\,\partial_x u + y'(0)\,\partial_y u\Big) \\
&= \Big(a\,y'(0)\,\partial_x u\,\partial_y v + b\,x'(0)\,\partial_y u\,\partial_x v\Big) \\
&\quad - \Big(a\,y'(0)\,\partial_x v\,\partial_y u + b\,x'(0)\,\partial_y v\,\partial_x u\Big) \\
&= \Big(a\,y'(0) - b\,x'(0)\Big)\Big(\partial_x u\,\partial_y v - \partial_x v\,\partial_y u\Big) \\
&= \det \begin{pmatrix} a & b \\ x'(0) & y'(0) \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Cambiamento di variabili in integrali doppi

Sia D un dominio C^1 regolare, con bordo ∂D parametrizzato dalle curve semplici chiuse (e C^1) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Supponiamo inoltre che tutte le curve γ_i sono orientate in senso antiorario (positivamente risp. a D), in modo che vale la formula di Stokes

$$\iint_D d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha \ ,$$

per ogni 1-forma di classe C^2 su D. Per semplicità scriveremo

$$\int_{\partial D} \alpha := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha \ .$$

In questo modo

$$\iint_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha \ .$$

Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi di $\mathbb{R}^2$ e sia

$$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2, \qquad \Phi(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

un diffeomorfismo di classe C^2.

Inoltre, supponiamo che Ω_1 contiene il dominio D :

$$D \subset \Omega_1 \ .$$

Osserviamo che l'insieme $\Phi(D)$ è ancora un dominio regolare C^1 e che il suo bordo è parametrizzato dalle curve (semplici chiuse e di classe C^1)

$$\Phi(\gamma_1), \ldots, \Phi(\gamma_n).$$

Teorema 47. *Con le notazioni e le ipotesi di sopra, abbiamo*

$$\iint_D F\big(\Phi(x, y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(D)} F(u, v)\,du\,dv\,,$$

dove

$$F\big(\Phi(x, y)\big) = F\big(u(x, y), v(x, y)\big) \qquad e \qquad \det(D\Phi) = \det \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) & \partial_y u(x, y) \\ \partial_x v(x, y) & \partial_y v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dimostreremo il teorema usando la formula di Stokes. Avremo quindi bisogno di scrivere la 2-forma $F(x, y)\,dx \wedge dy$ come $d\alpha$ per qualche 1-forma α.

Lemma 48. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sia una funzione di classe C^1. Allora, esiste una una 1-forma*

$$\alpha = a(x,y)\,dy,$$

di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$, tale che

$$d\alpha = F(x,y)\,dx \wedge dy\ .$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come

$$a(x,y) = \int_0^x F(t,y)\,dt\ .$$

Allora a è di classe C^1 (perché ?) e

$$\partial_x a(x,y) = F(x,y) \qquad \text{in} \qquad \mathbb{R}^2\ .$$

In particolare,

$$\begin{aligned} d\alpha &= da \wedge dy \\ &= \Big(\partial_x a(x,y)\,dx + \partial_y a(x,y)\,dy\Big) \wedge dy \\ &= \partial_x a(x,y)\,dx \wedge dy \\ &= F(x,y)\,dx \wedge dy\ , \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione del lemma. □

Dimostrazione del teorema: Sia α la 1-forma dal lemma precedente. Definiamo la 1-forma

$$\begin{aligned} \beta &= a(u(x,y),v(x,y))\,dv \\ &= a(u(x,y),v(x,y))\,\partial_x v(x,y)\,dx + a(u(x,y),v(x,y))\,\partial_y v(x,y)\,dy \end{aligned}$$

e osserviamo che

$$d\beta = \partial_y\Big[a(u(x,y),v(x,y))\,\partial_x v(x,y)\Big]\,dy \wedge dx + \partial_x\Big[a(u(x,y),v(x,y))\,\partial_y v(x,y)\Big]\,dx \wedge dy$$

Ora, siccome $\partial_{yx}v(x,y) = \partial_{xy}v(x,y)$, abbiamo

$$\begin{aligned} d\beta &= -\partial_y\Big[a(u(x,y),v(x,y))\Big]\,\partial_x v(x,y)\,dx \wedge dy + \partial_x\Big[a(u(x,y),v(x,y))\Big]\,\partial_y v(x,y)\,dx \wedge dy \\ &= \Big[-\Big(\partial_y u\,\partial_u a(u,v) + \cancel{\partial_y v\,\partial_v a(u,v)}\Big)\,\partial_x v + \Big(\partial_x u\,\partial_u a(u,v) + \cancel{\partial_x v\,\partial_v a(u,v)}\Big)\,\partial_y v\,\Big]dx \wedge dy \\ &= \Big[\partial_x u\,\partial_y v - \partial_y u\,\partial_x v\Big]\,\partial_u a(u,v)\,dx \wedge dy \qquad \text{(scriviamo solo } u \text{ e } v \text{ al posto di } u(x,y) \text{ e } v(x,y)\text{)} \\ &= \Big[\partial_x u\,\partial_y v - \partial_y u\,\partial_x v\Big]\,F(u,v)\,dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo dimostrato che

$$\int_D d\beta = \iint_D F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,\det\begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}\,dx\,dy.$$

Applicando la formula di Stokes al dominio D e la forma β, abbiamo che

$$\int_D d\beta = \int_{\partial D^+} \beta = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \beta.$$

Ricordiamo che per ipotesi γ_i sono le curve che parametrizzano ∂D in senso antiorario.

Ora dimostriamo che

$$\int_{\gamma_i} \beta = \int_{\Phi(\gamma_i)} \alpha.$$

Infatti, se $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ è la curva $\gamma_i(t) = \big(x(t),y(t)\big)$, allora

$$\gamma_i'(t) = \big(x'(t),y'(t)\big),$$

(D'ora in poi usiamo la scrittura compatta $x_t = x(t)$ e $y_t = y(t)$)

$$(\Phi\circ\gamma_i)(t) = \Big(u\big(x_t,y_t\big), v\big(x_t,y_t\big)\Big)$$

$$(\Phi\circ\gamma_i)'(t) = \Big(x'(t)\,\partial_x u\big(x_t,y_t\big) + y'(t)\,\partial_y u\big(x_t,y_t\big)\ ,\ x'(t)\,\partial_x v\big(x_t,y_t\big) + y'(t)\,\partial_y v\big(x_t,y_t\big)\Big).$$

Quindi, per definizione di integrale di una 1-forma su una curva, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_i}\beta &= \int_a^b \Big(a\big(u(x_t,y_t),v(x_t,y_t)\big)\,\partial_x v(x_t,y_t)\,x'(t) + a\big(u(x_t,y_t),v(x_t,y_t)\big)\,\partial_y v(x_t,y_t)\,y'(t)\Big)\,dt\\
&= \int_a^b a\big(u(x_t,y_t),v(x_t,y_t)\big)\,\partial_t\Big[v(x_t,y_t)\Big]\,dt\\
&= \int_{\Phi\circ\gamma_i}\alpha.
\end{aligned}$$

Ora consideriamo due casi:

Caso 1. Il diffeomorfismo Φ preserva l'orientazione ($\det(D\Phi)>0$). Allora le curve

$$\sigma_i = \Phi\circ\gamma_i$$

parametrizzano il bordo di $\Phi(D)$ in senso antiorario. Di conseguenza, applicando la formula di Stokes al dominio $\Phi(D)$ e la forma α, otteniamo :

$$\int_{\Phi(D)} d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{\Phi(\gamma_i)}\alpha.$$

Ora, mettendo insieme tutti i passaggi, abbiamo

$$\begin{aligned}
\iint_D F(\Phi(x,y))\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy &= \iint_D F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\det\begin{pmatrix}\partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y)\\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y)\end{pmatrix}dx\,dy\\
&= \int_D d\beta \qquad \text{(vedi il calcolo di } d\beta)\\
&= \sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i}\beta \qquad \text{(Stokes per } \beta \text{ in } D)\\
&= \sum_{i=1}^n\int_{\Phi(\gamma_i)}\alpha\\
&= \int_{\Phi(D)} d\alpha \qquad \text{(Stokes per } \alpha \text{ in } \Phi(D))\\
&= \iint_{\Phi(D)} F(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(vedi il lemma),}
\end{aligned}$$

oppure, visto che nel dominio $\Phi(D)$ abbiamo chiamato la variabile sull'asse orizzontale u e la variabile sull'asse verticale v, possiamo anche scrivere l'ultimo integrale come

$$\iint_{\Phi(D)} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv.$$

Questo conclude la dimostrazione nel caso 1.

Caso 2. Il diffeomorfismo Φ rovescia l'orientazione ($\det(D\Phi)<0$). Allora le curve

$$\sigma_i = \Phi\circ\gamma_i$$

parametrizzano il bordo $\partial\Phi(D)$ in senso orario. La formula di Stokes per α in $\Phi(D)$ si scrive come

$$\int_{\Phi(D)} d\alpha = -\sum_{i=1}^n\int_{\sigma_i}\alpha.$$

Quindi, rifacendo il calcolo di sopra

$$\begin{aligned}
\iint_D F(\Phi(x,y))\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy &= -\iint_D F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\det\begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y)\end{pmatrix} dx\,dy \\
&= -\int_D d\beta \qquad \text{(vedi il calcolo di } d\beta) \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \beta \qquad \text{(Stokes per } \beta \text{ in } D) \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\Phi(\gamma_i)} \alpha \\
&= \int_{\Phi(D)} d\alpha \qquad \text{(Stokes per } \alpha \text{ in } \Phi(D)) \\
&= \iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv \qquad \text{(vedi il lemma)},
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione del teorema. □

Infine, osserviamo che vale il seguente risultato più generale che può essere ottenuto dal Teorema 47 tramite un argomento di approssimazione.

Teorema 49. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi in $\mathbb{R}^2$. Sia $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo C^1. Inoltre, siano D un dominio C^1 e $F : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora,*

$$\iint_D F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\det(D\Phi)\big|\,dx\,dy = \iint_{\Phi(D)} F(u,v)\,du\,dv\,,$$

dove, ponendo $\Phi(x,y) = \big(u(x,y),v(x,y)\big)$, abbiamo

$$F\big(\Phi(x,y)\big) = F\big(u(x,y),v(x,y)\big) \qquad e \qquad \det(D\Phi) = \det\begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y)\end{pmatrix}.$$

Integrazione in coordinate polari

Teorema 50. *Sia $F : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sulla palla chiusa di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Allora,*

$$\begin{aligned}
\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} F\big(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\big) r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R F\big(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta\big) r\ dr\,d\theta\ .
\end{aligned}$$

L'integrale della Gaussiana

Esercizio 51. *Calcolare*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Soluzione. Cominciamo con il conto formale. Sia $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$

Allora,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Ora, usando il cambiamento di varibile

$$(0,+\infty)\times(0,\pi)\ni(r,\theta)\ \mapsto\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

abbiamo

$$dx\,dy = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

Quindi, abbiamo

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}\,d\theta\,r\,dr. \end{aligned}$$

Integrando prima in θ otteniamo

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}\,d\theta\,r\,dr \\ &= 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-r^2/2}\,r\,dr. \end{aligned}$$

Ora, siccome

$$\partial_r\left(e^{-r^2/2}\right) = -r\,e^{-r^2/2},$$

oitteniamo

$$I^2 = 2\pi\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{+\infty} = 2\pi.$$

Di conseguenza, $I = \sqrt{2\pi}$.

Preocediamo ora con la dimostrazione rigorosa.

Sia ora $I(R) = \displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx$. Per definizione di integrale improprio abbiamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} I(R).$$

Come sopra, calcoliamo

$$\begin{aligned}
I^2(R) &= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right)\\
&= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2/2}\,dy\right)\\
&= \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{+R} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\,dx\,dy\\
&= \iint_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Ora siccome

$$B_R \subset [-R,R]\times[-R,R] \subset B_{2R}$$

e la funzione integranda è positiva, abbiamo

$$\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy. \le I^2(R) \le \iint_{B_{2R}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy.$$

Ora, usando il cambiamento di varibile

$$(0,+\infty)\times(0,\pi) \ni (r,\theta) \;\mapsto \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

abbiamo

$$dx\,dy = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy &= \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}\,d\theta\,r\,dr\\
&= 2\pi\int_0^R e^{-r^2/2}\,r\,dr\\
&= 2\pi\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^R = 2\pi\left(1-e^{-R^2/2}\right).
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\iint_{B_{2R}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = 2\pi\left(1-e^{-(2R)^2/2}\right).$$

Quindi abbiamo le disuguaglianze

$$2\pi\left(1-e^{-R^2/2}\right) \le I^2(R) \le 2\pi\left(1-e^{-(2R)^2/2}\right).$$

Indine, per il teorema dei carabinieri

$$I^2 = \lim_{R\to+\infty} I^2(R) = 2\pi.$$

e quindi

$$I = \sqrt{2\pi}.$$

$\square$

Integrazione di 2-forme su superfici

Superfici parametriche. Ricordiamo che per definizione una curva in $\mathbb{R}^3$ è una funzione

$$\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3,$$

L'oggetto geometrico che disegnamo quando parliamo di una curva è l'immagine della funzione γ ovvero l'insieme

$$c = \{\gamma(t) \;:\; t \in (a,b)\},$$

detto anche *sostegno della curva.* Con le superfici parametriche la situazione è simile. Una *superficie parametrica* è una mappa

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3,$$

dove stavolta Ω è un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ (il che è l'esatto analogo dell'intervallo aperto (a, b) in $\mathbb{R}^2$). Il *sostegno della superficie* è invece dato da

$$S = \Big\{ \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (s,t) \in \Omega \Big\}.$$

Osservazione 52. *In alternativa, una superficie può anche essere vista direttamente come un oggetto geometrico, ovvero come un insieme che è localmente il sostegno di una superficie parametrica (in $\mathbb{R}^3$ oppure in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$).*

Superfici equivalenti. Come per le curve, possiamo definire quando due superfici equivalenti.

Definizione 53. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi di $\mathbb{R}^2$. Diciamo che le superfici*

$$\Phi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3 \qquad e \qquad \Phi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^3.$$

sono equivalenti se esiste un diffeomorfismo $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ di classe C^1 tale che :

- $\Phi_1 = \Phi_2 \circ F$*;*
- F *preserva l'orientazione.*

Integrazione di 2-forme su superfici. Sia α la 2-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\, dy \wedge dz + b(x,y,z)\, dz \wedge dx + c(x,y,z)\, dx \wedge dy.$$

Definiamo l'integrale della 2-forma α sulla superficie parametrica $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ come

$$\int_S \alpha := \int_\Omega a(x,y,z)\, dy \wedge dz + b(x,y,z)\, dz \wedge dx + c(x,y,z)\, dx \wedge dy,$$

dove dx, dy e dz sono i differenziali delle funzioni $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ e $z = z(s,t)$, ovvero

$$\begin{aligned} dx &= \partial_s x(s,t)\, ds + \partial_t x(s,t)\, dt \\ dy &= \partial_s y(s,t)\, ds + \partial_t y(s,t)\, dt \\ dz &= \partial_s z(s,t)\, ds + \partial_t z(s,t)\, dt \end{aligned}$$

Precisamente, sviluppando la nuova forma definita su Ω, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_S \alpha &= \int_\Omega a(x,y,z)\, dy \wedge dz + b(x,y,z)\, dz \wedge dx + c(x,y,z)\, dx \wedge dy \\ &= \int_\Omega a\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s y\, ds + \partial_t y\, dt\Big) \wedge \Big(\partial_s z\, ds + \partial_t z\, dt\Big) \\ &\qquad + \int_\Omega b\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s z\, ds + \partial_t z\, dt\Big) \wedge \Big(\partial_s x\, ds + \partial_t x\, dt\Big) \\ &\qquad\qquad + \int_\Omega c\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s x\, ds + \partial_t x\, dt\Big) \wedge \Big(\partial_s y\, ds + \partial_t y\, dt\Big) \\ &= \int_\Omega a\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s y\, \partial_t z - \partial_t y\, \partial_s z\Big)\, ds \wedge dt \\ &\qquad + \int_\Omega b\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s z\, \partial_t x - \partial_t z\, \partial_s x\Big)\, ds \wedge dt \\ &\qquad\qquad + \int_\Omega c\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s x\, \partial_t y - \partial_t x\, \partial_s y\Big)\, ds \wedge dt \\ &= \int_\Omega \Big(a\big(\partial_s y\, \partial_t z - \partial_t y\, \partial_s z\big) + b\, \big(\partial_s z\, \partial_t x - \partial_t z\, \partial_s x\big) + c\, \big(\partial_s x\, \partial_t y - \partial_t x\, \partial_s y\big)\Big)\, ds\, dt \end{aligned}$$

L'ultima espressione può anche essere scritta come

$$\int_\Omega \left(a \det \begin{pmatrix} \partial_s y & \partial_s z \\ \partial_t y & \partial_t z \end{pmatrix} + b \det \begin{pmatrix} \partial_s z & \partial_s x \\ \partial_t z & \partial_t x \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} \partial_s x & \partial_s y \\ \partial_t x & \partial_t y \end{pmatrix} \right) ds\, dt$$

oppure come

$$\int_\Omega F\big(\Phi(s,t)\big) \cdot \Big(\partial_s \Phi(s,t) \wedge \partial_t \Phi(s,t)\Big)\, ds\, dt,$$

dove F è il campo vettoriale

$$F\big(\Phi(s,t)\big) = \Big(a\big(\Phi(s,t)\big), b\big(\Phi(s,t)\big), c\big(\Phi(s,t)\big)\Big),$$

e $\partial_s\Phi(s,t) \wedge \partial_t\Phi(s,t)$ è il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ fra i vettori

$$\partial_s\Phi(s,t) = \Big(\partial_s x(s,t),\, \partial_s y(s,t),\, \partial_s z(s,t)\Big),$$

$$\partial_t\Phi(s,t) = \Big(\partial_t x(s,t),\, \partial_t y(s,t),\, \partial_t z(s,t)\Big).$$

Integrazione di 2-forme su superfici equivalenti. Ricordiamo che integrando 1-forma su due curve equivalenti da lo stesso risultato. Lo stesso vale per l'integrale di una 2-forma su due superfici equivalenti.

Proposizione 54. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi di $\mathbb{R}^2$ e*

$$\Phi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3 \qquad e \qquad \Phi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$$

due superfici parametriche equivalenti, $S = \Phi_1(\Omega_1)$ e $S_2 = \Phi_2(\Omega_2)$. Sia α una 2-forma in $\mathbb{R}^3$. Allora

$$\int_{S_1} \alpha = \int_{S_2} \alpha$$

Dimostrazione: Per esercizio. □

Formula di Stokes su superfici

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ con bordo di classe C^1 parametrizzato (in senso antiorario) dalle curve semplici chiuse $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Inoltre, sia

$$\Phi = (x, y, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

una funzione di classe C^2. Definiamo la "superficie"

$$S = \Big\{\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (s,t) \in \Omega\Big\}.$$

e le curve

$$\sigma_i(t) = \Phi(\gamma_i(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Teorema 55. *Sia α una 1-forma su $\mathbb{R}^3$. Allora*

$$\int_S d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} \alpha \ .$$

Dimostrazione: Sia

$$\alpha = a(x,y,z)\, dx + b(x,y,z)\, dy + c(x,y,z)\, dz.$$

Allora

$$d\alpha = \big(\partial_y c - \partial_z b\big)\, dy \wedge dz + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\, dz \wedge dx + \big(\partial_x b - \partial_y a\big)\, dx \wedge dy \ .$$

Definiamo la 1-forma

$$\begin{aligned}
\beta = a\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s x\, ds + \partial_t x\, dt\Big) \\
+ b\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s y\, ds + \partial_t y\, dt\Big) \\
+ c\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \Big(\partial_s z\, ds + \partial_t z\, dt\Big) \\
= \Big(a\, \partial_s x + b\, \partial_s y + c\, \partial_s z\Big)\, ds \\
+ \Big(a\, \partial_t x + b\, \partial_t y + c\, \partial_t z\Big)\, dt
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} d\beta &= -\partial_t\Big(a\,\partial_s x + b\,\partial_s y + c\,\partial_s z\Big)\,ds\wedge dt \\ &\quad + \partial_s\Big(a\,\partial_t x + b\,\partial_t y + c\,\partial_t z\Big)\,ds\wedge dt \\ &= -\Big(\partial_t\big[a(x,y,z)\big]\,\partial_s x + \partial_t\big[b(x,y,z)\big]\,\partial_s y + \partial_t\big[c(x,y,z)\big]\,\partial_s z\Big)\,ds\wedge dt \\ &\quad + \Big(\partial_s\big[a(x,y,z)\big]\,\partial_t x + \partial_s\big[b(x,y,z)\big]\,\partial_t y + \partial_s\big[c(x,y,z)\big]\,\partial_t z\Big)\,ds\wedge dt. \end{aligned}$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_S d\alpha &= \int_\Omega \Big(\big(\partial_y c - \partial_z b\big)\big(\partial_s y\,\partial_t z - \partial_t y\,\partial_s z\big) \\ &\qquad + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\,\big(\partial_s z\,\partial_t x - \partial_t z\,\partial_s x\big) \\ &\qquad\quad + \big(\partial_x b - \partial_y a\big)\,\big(\partial_s x\,\partial_t y - \partial_t x\,\partial_s y\big)\Big)\,ds\wedge dt \\ &= \int_\Omega d\beta \end{aligned}$$

Per la formula di Stokes nel piano abbiamo

$$\int_\Omega d\beta = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \beta.$$

Infine, osserviamo che se la curva $\gamma_i(r) = (S(r), T(r))$ è definita su $[a_i, b_i]$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} \beta &= \int_{a_i}^{b_i} \Big(a\,\partial_S x(S,T) + b\,\partial_S y(S,T) + c\,\partial_S z(S,T)\Big)\partial_r S \\ &\qquad + \Big(a\,\partial_T x(S,T) + b\,\partial_T y(S,T) + c\,\partial_T z(S,T)\Big)\partial_r T\,dr \\ &= \int_{a_i}^{b_i} a(x,y,z)\Big(\partial_S x(S,T)\partial_r S + \partial_T x(S,T)\partial_r T\Big) \\ &\qquad + b(x,y,z)\Big(\partial_S y(S,T)\partial_r S + \partial_T y(S,T)\partial_r T\Big) \\ &\qquad\quad + c(x,y,z)\Big(\partial_S z(S,T)\partial_r S + \partial_T z(S,T)\partial_r T\Big)\,dr \\ &= \int_{a_i}^{b_i} a(x,y,z)\partial_r x \\ &\qquad + b(x,y,z)\partial_r y \\ &\qquad\quad + c(x,y,z)\partial_r z\,dr \\ &= \int_{\sigma_i} \alpha \end{aligned}$$

□

Campi vettoriali e forme differenziali in $\mathbb{R}^3$

Campi vettoriali e 2-forme. Divergenza di un campo.

Ad ogni campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

possiamo associare la 2-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\,dy\wedge dz + b(x,y,z)\,dz\wedge dx + c(x,y,z)\,dy\wedge dz$$

Esercizio 56. *Dimostrare che*

$$d\alpha = \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz$$

Campi vettoriali e 1-forme. Rotore.

Ad ogni campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

possiamo associare la 1-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$$

Allora

$$d\alpha = \big(\partial_y c - \partial_z b\big)\,dy\wedge dz + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\,dz\wedge dx + \big(\partial_x b - \partial_y a\big)\,dx\wedge dy\ .$$

Il campo

$$\operatorname{rot} F = \Big(\partial_y c - \partial_z b\,,\ \partial_z a - \partial_x c\,,\ \partial_x b - \partial_y a\Big) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

è detto rotore di F.

Prodotto vettoriale

Prendiamo due vettori (o campi vettoriali)

$$u = (a,b,c) \qquad \text{e} \qquad v = (A,B,C)$$

e consideriamo i corrispondenti 1-forme

$$\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz \qquad \text{e} \qquad \beta = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

Calcoliamo il prodotto esterno

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta &= \big(a\,dx + b\,dy + c\,dz\big)\wedge\big(A\,dx + B\,dy + C\,dz\big)\\ &= \big(bC - cB\big)\,dy\wedge dz\\ &\qquad + \big(cA - aC\big)\,dz\wedge dx\\ &\qquad\qquad + \big(aB - bA\big)\,dx\wedge dy\end{aligned}$$

Il vettore (campo vettoriale) di coordinate

$$\big(bC - cB\ \ cA - aC\,,\ aB - bA\big)$$

è precisamente il prodotto vettoriale $u\wedge v$.

Prodotto scalare

Prendiamo due vettori (o campi vettoriali)

$$u = (a,b,c) \qquad \text{e} \qquad v = (A,B,C)$$

e consideriamo la 1-forma

$$\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

e la 2-forma

$$\beta = A\,dy\wedge dz + B\,dz\wedge dx + C\,dx\wedge dy.$$

Calcoliamo il prodotto esterno

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta &= \big(a\,dx + b\,dy + c\,dz\big)\wedge\big(A\,dy\wedge dz + B\,dz\wedge dx + C\,dx\wedge dy\big)\\ &= aA\,dx\wedge dy\wedge dz\\ &\qquad + bB\,dy\wedge dz\wedge dx\\ &\qquad\qquad + cC\,dz\wedge dx\wedge dy\\ &= (aA + bB + cC)\,dx\wedge dy\wedge dz.\end{aligned}$$

Osserviamo che $aA + bB + cC$ è il solito prodotto scalare $u\cdot v$.

Integrali di funzioni su superfici

Sia Ω un aperto limlitato di $\mathbb{R}^2$ e sia
$$\varphi = (x, y, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
una funzione di classe C^1. Definiamo l'insieme
$$S = \Big\{ \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (s,t) \in \Omega \Big\}$$
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'integrale di F sulla "superficie" S come
$$\int_S F := \int_\Omega F\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \, |\partial_s \varphi \wedge \partial_t \varphi| \, ds \, dt \ ,$$
dove
$$\partial_s \varphi := \big(\partial_s x,\, \partial_s y,\, \partial_s z\big) \qquad \text{e} \qquad \partial_t \varphi := \big(\partial_t x,\, \partial_t y,\, \partial_t z\big)$$
Teorema 57. *L'integrale non dipende dalla parametrizzazione della superficie.*

Dimostrazione: Sia
$$(s,t) : \omega \to \Omega \ , \quad s = s(u,v), \ t = t(u,v),$$
un diffeomorfismo (di classe C^2, perché applicheremo la formula del cambiamento delle variabili) tra ω e Ω. Allora, la superficie S può essere parametrizzata su ω come segue:
$$S = \Big\{ \psi(u,v) := \Big(x\big(s(u,v), t(u,v)\big), y\big(s(u,v), t(u,v)\big), z\big(s(u,v), t(u,v)\big) \Big) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (u,v) \in \omega \Big\}$$
Calcoliamo
$$\partial_u \psi := \Big(\partial_u s \, \partial_s x + \partial_u t \, \partial_t x \ , \ \partial_u s \, \partial_s y + \partial_u t \, \partial_t y \ , \ \partial_u s \, \partial_s z + \partial_u t \, \partial_t z \Big) = \partial_u s \, \partial_s \varphi + \partial_u t \, \partial_t \varphi$$
$$\partial_v \psi := \Big(\partial_v s \, \partial_s x + \partial_v t \, \partial_t x \ , \ \partial_v s \, \partial_s y + \partial_v t \, \partial_t y \ , \ \partial_v s \, \partial_s z + \partial_v t \, \partial_t z \Big) = \partial_v s \, \partial_s \varphi + \partial_v t \, \partial_t \varphi$$
e ricordiamo che
$$\begin{array}{rcl} \partial_u s = \partial_u s(u,v) & \text{e} & \partial_v s = \partial_v s(u,v) \\ \partial_u t = \partial_u t(u,v) & \text{e} & \partial_v t = \partial_v t(u,v) \\ \partial_s \varphi = \partial_s \varphi(s(u,v), t(u,v)) & \text{e} & \partial_t \varphi = \partial_t \varphi(s(u,v), t(u,v)), \end{array}$$
Ricordiamo che $\partial_s \varphi = \partial_s \varphi(s(u,v), t(u,v))$ significa la derivata di φ rispetto la prima variabile, calcolata nel punto $(s(u,v), t(u,v))$. Di conseguenza
$$\partial_u \psi \wedge \partial_v \psi = \Big(\partial_u s \, \partial_v t - \partial_v s \, \partial_u t \Big) \partial_s \varphi \wedge \partial_t \varphi = \det \begin{pmatrix} \partial_u s & \partial_u t \\ \partial_v s & \partial_v t \end{pmatrix} \partial_s \varphi \wedge \partial_t \varphi \ .$$
Ora, per la formula del cambiamento delle variabili in $\mathbb{R}^2$ abbiamo
$$\begin{aligned} &\int_\omega F\big(x(s(u,v), t(u,v)), y(s(u,v), t(u,v)), z(s(u,v), t(u,v))\big) \, |\partial_u \psi \wedge \partial_v \psi| \, du \, dv \\ &\quad = \int_\omega F\big(x(s(u,v), t(u,v)), y(s(u,v), t(u,v)), z(s(u,v), t(u,v))\big) \, \big|\partial_s \varphi \wedge \partial_t \varphi\big| \, \left| \det \begin{pmatrix} \partial_u s & \partial_u t \\ \partial_v s & \partial_v t \end{pmatrix} \right| \, du \, dv \\ &\quad = \int_\Omega F\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \, \big|\partial_s \varphi \wedge \partial_t \varphi\big| \, ds \, dt \end{aligned}$$
che conclude la dimostrazione. □

Teorema della divergenza

Teorema 58. *Sia D un dominio di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$. Sia $F : D \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su D. Allora*
$$\iiint_D \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial D} F \cdot \nu,$$
dove $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^3$ è il versore normale a ∂D uscente da D.