Forme differenziali

0-forme

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Per definizione, le 0-forme di classe C^k su Ω sono le funzioni di classe C^k su Ω.

1-forme

Definizione 1 (1-forme)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una 1-forma differenziale di classe C^k su Ω è un'espressione della forma*

$$\alpha_1(x)\,dx_1 + \alpha_2(x)\,dx_2 + \alpha_3(x)\,dx_3 + \cdots + \alpha_n(x)\,dx_n,$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni di classe C^k su Ω.

Esempio 2.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,dx_i$ *e* $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\,dx_i$ *sono forme differenziali in $\mathbb{R}^n$;*
- $(x^2 + y)\,dx + xy\,dy$ *è una 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$, dove x e y sono le coordiante nel piano;*
- $x\,dx + z\,dy - y\,dz$ *e* $\sin(z)\,dx - dz$ *sono forme differenziali in $\mathbb{R}^3$, dove x, y, z sono le coordiante in $\mathbb{R}^3$.*

Definizione 3 (Operazioni con le forme differenziali)**.** *Siano*

$$\alpha = \alpha_1(x)\,dx_1 + \alpha_2(x)\,dx_2 + \alpha_3(x)\,dx_3 + \cdots + \alpha_n(x)\,dx_n,$$
$$\beta = \beta_1(x)\,dx_1 + \beta_2(x)\,dx_2 + \beta_3(x)\,dx_3 + \cdots + \beta_n(x)\,dx_n,$$

due 1-forme di classe C^k (in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Definiamo la forma $\alpha + \beta$ come

$$\alpha + \beta = \big(\alpha_1(x) + \beta_1(x)\big)\,dx_1 + \big(\alpha_2(x) + \beta_2(x)\big)\,dx_2 + \cdots + \big(\alpha_n(x) + \beta_n(x)\big)\,dx_n.$$

Inoltre, data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^k, definiamo la forma $f\alpha$ come

$$f\alpha := f(x)\alpha_1(x)\,dx_1 + f(x)\alpha_2(x)\,dx_2 + \cdots + f(x)\alpha_n(x)\,dx_n.$$

2-forme

Definizione 4 (2-forme)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una 2-forma differenziale di classe C^k su Ω è un'espressione della forma*

$$\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_{ij}(x)\,dx_i \wedge dx_j,$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e, per ogni $1 \le i < j \le n$, la funzione $\alpha_{ij} \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe C^k su Ω.

Inoltre, definamo

$$dx_i \wedge dx_i := 0 \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \ldots, n.$$
$$dx_j \wedge dx_i := -dx_i \wedge dx_j \quad \text{per ogni} \quad 1 \le i < j \le n.$$

Definizione 5 (Operazioni con le 2-forme differenziali)**.** *Siano*

$$\alpha = \sum_{1\le i<j\le n} \alpha_{ij}(x)\,dx_i \wedge dx_j\ ,$$

$$\beta = \sum_{1\le i<j\le n} \beta_{ij}(x)\,dx_i \wedge dx_j\ ,$$

due 2-forme di classe C^k (in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Definiamo la forma $\alpha + \beta$ come

$$\alpha + \beta = \sum_{1\le i<j\le n} \big(\alpha_{ij}(x) + \beta_{ij}(x)\big)\,dx_i \wedge dx_j\ .$$

Inoltre, data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^k, definiamo la forma $f\alpha$ come

$$f\alpha := \sum_{1\le i<j\le n} \big(f(x)\alpha_{ij}(x)\big)\,dx_i \wedge dx_j, .$$

k-forme

Definizione 6 (k-forme)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Una k-forma differenziale di classe C^m su Ω è un'espressione della forma*

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e, per ogni k-upla di indici $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, la funzione $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe C^m su Ω.

Inoltre, possiamo definire l'espressione $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ anche per indici $1 \le i_1, \dots i_k \le n$ che non sono ordinati. Per fare ciò usiamo la regola seguente:

- se due indici consecutivi sono uguali (per esempio $i_1 = i_2$ oppure $i_2 = i_3$, oppure $i_{k-1} = i_k$), allora $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0$;
- possiamo scambiare l'ordine di due indici consecutivi cambiando il segno davanti. Per esempio

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge dx_{i_4} \cdots \wedge dx_{i_k} = -\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_4} \wedge dx_{i_3} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

  Possiamo applicare questa operazione più volte, ogni volta cambiando il segno.

Esempio 7. *Per esempio, in dimensione 3 abbiamo:*

$$dx \wedge dy \wedge dz = -\, dx \wedge dz \wedge dy = -\Big(-\, dz \wedge dx \wedge dy \Big) = dz \wedge dx \wedge dy.$$

In dimensione 4, usando le coordiante x, y, z, t, possiamo calcolare

$$dy \wedge dx \wedge dt \wedge dz = -\, dx \wedge dy \wedge dt \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

Si può facilmente verificare, che scambiando solo due indici l'espressione cambia segno. Per esempio,

$$dt \wedge dy \wedge dz \wedge dx = -dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

Definizione 8 (Operazioni con le k-forme differenziali)**.** *Siano*

$$\alpha = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ ,$$

$$\beta = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \beta_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ ,$$

due 2-forme di classe C^m (in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Definiamo la forma $\alpha + \beta$ come

$$\alpha + \beta \quad = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \big(\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) + \beta_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)\big)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ .$$

Inoltre, data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^m, definiamo la forma $f\alpha$ come

$$f\alpha \quad = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \big(f(x)\, \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)\big)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ .$$

Prodotto di forme differenziali

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano

$$\alpha = \alpha_1(x)\, dx_1 + \alpha_2(x)\, dx_2 + \alpha_3(x)\, dx_3 + \cdots + \alpha_n(x)\, dx_n,$$

$$\beta = \beta_1(x)\, dx_1 + \beta_2(x)\, dx_2 + \beta_3(x)\, dx_3 + \cdots + \beta_n(x)\, dx_n,$$

due 1-forme di classe C^k si Ω. Definiamo la 2-forma $\alpha \wedge \beta$ come

$$\alpha \wedge \beta := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_j(x)\, dx_i \wedge dx_j.$$

Il prodotto di una k-forma α con una l-forma β è una $(k + l)$ forma $\alpha \wedge \beta$ che può essere calcolata attraverso le regole seguenti:

- se f e g sono funzioni, α è una k-forma e β è una l-forma, allora

$$(f(x)\alpha) \wedge (g(x)\beta) = f(x)g(x)\, \alpha \wedge \beta.$$

  Per esempio,

$$\big(x^2\, dy\big) \wedge \big(y\, dx\big) = x^2 y\, dy \wedge dx.$$

- se α e β sono due k-forme e γ e δ sono l-forme, allora
$$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma,$$
$$\alpha\wedge(\gamma+\delta)=\alpha\wedge\gamma+\alpha\wedge\delta.$$
- se α è una k-forma e β è una l-forma, allora
$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha.$$
- se e α è una k-forma, β è una l-forma e γ è una m-forma, allora
$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$$

Esempio 9.
$$\begin{aligned}(xdx+ydy)\wedge(y\,dx-x\,dy)&=xy\,dx\wedge dx-x^2\,dx\wedge dy+y^2\,dy\wedge dx-xy\,dy\wedge dy\\&=-x^2\,dx\wedge dy+y^2\,dy\wedge dx\\&=-x^2\,dx\wedge dy-y^2\,dx\wedge dy\\&=-(x^2+y^2)\,dx\wedge dy.\end{aligned}$$

Derivata esterna e differenziale

Definizione 10. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^m per un qualche $m\geq 1$. Definiamo il differenziale di f come*
$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx_i.$$
Osserviamo che df è una 1-forma di classe C^{m-1} su Ω.

Più in generale, data una k-forma
$$\alpha\quad=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\alpha_{i_1i_2\ldots i_k}(x)\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\,,$$
di classe C^m su Ω, definiamo la derivata esterna di α come
$$d\alpha\quad=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}d\alpha_{i_1i_2\ldots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\,.$$
Osserviamo che $d\alpha$ è una $(k+1)$-forma di classe C^{m-1}

Esempio 11. *In $\mathbb{R}^2$, con coordianate x,y, calcoliamo*
- $d(x^2)=2x\,dx$;
- $d(xy)=y\,dx+x\,dy$;
- $d(ye^x)=ye^x\,dx+e^x\,dy$;
- $d\big(ydx\big)=dy\wedge dx=-dx\wedge dy$;
- $d\big(xydy\big)=d(xy)\wedge dy=\big(y\,dx+x\,dy\big)\wedge dy=y\,dx\wedge dy$;
- $d\big(x\,dy-y\,dx\big)=dx\wedge dy-dy\wedge dx=2\,dx\wedge dy$;
- $d\big(x\,dx+y\,dy\big)=dx\wedge dx+dy\wedge dy=0.$

Esempio 12. *In $\mathbb{R}^3$, con coordianate x,y,z, calcoliamo*
- $d(xyz)=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$;
- $d(x^2z)=2xz\,dx+x^2\,dz$;
- $d(y\sin(z))=\sin z\,dy+y\cos z\,dz$;
- $d\big(yzdx\big)=d(yz)\wedge dx=\big(z\,dy+y\,dz\big)\wedge dx=z\,dy\wedge dx+y\,dz\wedge dx=-z\,dx\wedge dy+y\,dz\wedge dx$;
- $d(d(xyz))=?$

$$\begin{aligned}d(d(xyz))&=d\big(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz\big)\\&=d(yz)\wedge dx+d(xz)\wedge dy+d(xy)\wedge dz\\&=\big(z\,dy+y\,dz\big)\wedge dx+\big(z\,dx+x\,dz\big)\wedge dy+\big(x\,dy+y\,dx\big)\wedge dz\\&=z\,dy\wedge dx+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy+x\,dz\wedge dy+x\,dy\wedge dz+y\,dx\wedge dz\\&=0.\end{aligned}$$

Esercizio 13. *Scrivere come*
$$a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz,$$
oppure come
$$A(x,y,z)\,dx\wedge dy + B(x,y,z)\,dy\wedge dz + C(x,y,z)\,dz\wedge dx,$$
le forme differenziali seguenti.

(1) $d\left(\frac{xy}{z}\right)$
(2) $d(x-y)$
(3) $d(xy-yz+zx)$
(4) $d(x-y)\wedge d(y-z)$
(5) $d(x+z)\wedge d(x-z)$
(6) $d(xy)\wedge d(xz)$
(7) $d\big(zd(xy)\big)$;
(8) $d(d(xy))$
(9) $d(d(x^2-z^2))$
(10) $d(xy)\wedge(y\,dx - x\,dy)$.

Esercizio 14. *Calcolare*
$$d\left(-\frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy\right).$$

Esercizio 15. *Calcolare*
$$d\left(\frac{-y}{x+y}dx + \frac{x}{x+y}dy\right).$$

Esercizio 16. *Calcolare*
$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right).$$

Esercizio 17. *Sia $\varphi : R\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Calcolare*
$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\varphi\big(x^2+y^2\big)dx + \frac{x}{x^2+y^2}\varphi\big(x^2+y^2\big)dy\right).$$

Forme esatte e forme chiuse

Definizione 18 (Forme chiuse)**.** *Diciamo che una k-forma α (di classe C^1) è chiusa se $d\alpha = 0$.*

Teorema 19 (Esatta $\Rightarrow$ chiusa per le 1-forme)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Allora la 1-forma differenziale df è chiusa.*

Proof. Consideriamo prima il caso $n=2$. Allora $f=f(x,y)$ e
$$df = \partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy.$$
Allora
$$\begin{aligned} d(df) &= d\Big(\partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy\Big) \\ &= d(\partial_x f)\wedge dx + d(\partial_y f)\wedge dy \\ &= \Big(\partial_{xx} f(x,y)\,dx + \partial_{yx} f(x,y)\,dy\Big)\wedge dx + \Big(\partial_{xy} f(x,y)\,dx + \partial_{yy} f(x,y)\,dy\Big)\wedge dy \\ &= \partial_{yx} f(x,y)\,dy\wedge dx + \partial_{xy} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ &= \Big(-\partial_{yx} f(x,y) + \partial_{xy} f(x,y)\Big)\,dx\wedge dy. \end{aligned}$$
Per il Teorema di Schwartz abbiamo che $\partial_{yx} f(x,y) = \partial_{xy} f(x,y)$ il che conclude la dimostrazione nel caso $n=2$.

Dimostriamo ora il caso generale. Siano $x=(x_1,\dots,x_n)$, $f(x) = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ e
$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x)\,dx_i.$$

Allora

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\Big(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\,dx_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d(\partial_i f) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j\right) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j \wedge dx_i.
\end{aligned}$$

Ora siccome $dx_i \wedge dx_i = 0$ possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j \wedge dx_i = \sum_{1\le i<j\le n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j \wedge dx_i + \sum_{1\le j<i\le n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j \wedge dx_i.$$

Nella soconda somma scambiamo le variabili i e j, cioè scriviamo i al posto di j e j al posto di i. Quindi

$$\sum_{1\le j<i\le n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j \wedge dx_i = \sum_{1\le i<j\le n} \partial_i \partial_j f(x)\,dx_i \wedge dx_j.$$

Inoltre, siccome $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, abbiamo che

$$\sum_{1\le i<j\le n} \partial_i \partial_j f(x)\,dx_i \wedge dx_j = -\sum_{1\le i<j\le n} \partial_i \partial_j f(x)\,dx_j \wedge dx_i.$$

In conclusione,

$$\begin{aligned}
d(df) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} \partial_j \partial_i f(x)\,dx_j \wedge dx_i - \sum_{1\le i<j\le n} \partial_i \partial_j f(x)\,dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} \Big(\partial_j \partial_i f(x) - \partial_i \partial_j f(x)\Big)\,dx_j \wedge dx_i = 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo di nuovo usato il teorema di Schwartz. □

Teorema 20 (Esatta $\Rightarrow$ chiusa)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia α una k-forma di classe C^2 su Ω. Allora la $(k+1)$-forma differenziale $d\alpha$ è chiusa.*

Proof. Dal teorema precedente, segue che se α è una 0-forma (quindi una funzione), allora la 1-forma $d\alpha$ è chiusa.
Dimostreremo il teorema per una 1-forma α in $\mathbb{R}^3$. Il caso generale è analogo.

Consideriamo la 1-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz.$$

Dimostreremo che la 2-forma $d\alpha$ è chiusa.

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= d\Big(a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\Big)\\
&= da\wedge dx + db\wedge dy + dc\wedge dz\\
&= \Big(\partial_x a\,dx + \partial_y a\,dy + \partial_z a\,dz\Big)\wedge dx\\
&\qquad + \Big(\partial_x b\,dx + \partial_y b\,dy + \partial_z b\,dz\Big)\wedge dy\\
&\qquad\qquad + \Big(\partial_x c\,dx + \partial_y c\,dy + \partial_z c\,dz\Big)\wedge dz\\
&= \partial_y a\,dy\wedge dx + \partial_z a\,dz\wedge dx\\
&\qquad + \partial_x b\,dx\wedge dy + \partial_z b\,dz\wedge dy\\
&\qquad\qquad + \partial_x c\,dx\wedge dz + \partial_y c\,dy\wedge dz\\
&= \Big(\partial_x b - \partial_y a\Big)\,dx\wedge dy + \Big(\partial_z a - \partial_x c\Big)\,dz\wedge dx + \Big(\partial_y c - \partial_z b\Big)\,dy\wedge dz.
\end{aligned}
$$

Ora, calcoliamo $d(d\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
d(d\alpha) &= d\Big(\big(\partial_x b - \partial_y a\big)\,dx\wedge dy + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\,dz\wedge dx + \big(\partial_y c - \partial_z b\big)\,dy\wedge dz\Big)\\
&= d\big(\partial_x b - \partial_y a\big)\wedge dx\wedge dy + d\big(\partial_z a - \partial_x c\big)\wedge dz\wedge dx + d\big(\partial_y c - \partial_z b\big)\wedge dy\wedge dz\\
&= \partial_z\big(\partial_x b - \partial_y a\big)dz\wedge dx\wedge dy + \partial_y\big(\partial_z a - \partial_x c\big)dy\wedge dz\wedge dx + \partial_x\big(\partial_y c - \partial_z b\big)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che

$$
dz\wedge dx\wedge dy = (dz\wedge dx)\wedge dy = (-dx\wedge dz)\wedge dy = -dx\wedge(dz\wedge dy) = -dx\wedge(-dy\wedge dz) = dx\wedge dy\wedge dz.
$$

Nello stesso modo

$$
dy\wedge dz\wedge dx = dx\wedge dy\wedge dz.
$$

Quindi,

$$
\begin{aligned}
d(d\alpha) &= \partial_z\big(\partial_x b - \partial_y a\big)dx\wedge dy\wedge dz + \partial_y\big(\partial_z a - \partial_x c\big)dx\wedge dy\wedge dz + \partial_x\big(\partial_y c - \partial_z b\big)dx\wedge dy\wedge dz\\
&= \Big(\partial_{zx} b - \partial_{zy} a + \partial_{yz} a - \partial_{yx} c + \partial_{xy} c - \partial_{xz} b\Big)dx\wedge dy\wedge dz = 0.
\end{aligned}
$$

□

Definizione 21 (Forme esatte)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $k \ge 1$. Diciamo che una k-forma α è esatta se esiste una $(k-1)$ forma β tale che $d\beta = \alpha$.*

Le forme esatte sono anche chiuse (vedi Teorema 20), ma esistono forme esatte che non sono chiuse!

Proposizione 22 (Chiusa non implica esatta)**.** *Sia $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia α la 1-forma (di classe C^∞ su Ω)*

$$
\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.
$$

Dimostrare che α è chiusa ma non esatta su Ω.

Forme esatte e forme chiuse - esercizi

Esercizio 23. *Sia $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia α la 1-forma (di classe C^∞ su Ω)*

$$
\alpha = \frac{-y}{x^2+2y^2}dx + \frac{x}{x^2+2y^2}dy.
$$

Dimostrare che α è chiusa ma non esatta su Ω.

Esercizio 24. *Sia $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia α la 1-forma (di classe C^∞ su Ω)*

$$
\alpha = \frac{-y}{(x^2+y^2)^a}dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^a}dy.
$$

(1) Dimostrare che α non è esatta.
(2) Per quali valori del parametro $a > 0$ la forma risulta chiusa?

Esercizio 25. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-y^2x}{x^4+y^4}dx + \frac{x^2y}{x^4+y^4}dy.$$

Dire se α *è :*

(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);* - **È possibile che una forma sia esatta, ma non chiusa?**
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 26. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-y^2}{x^2+y^4}dx + \frac{xy}{x^2+y^4}dy.$$

Dire se α *è :*

(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 27. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-y^2}{x^2+y^4}dx + \frac{2xy}{x^2+y^4}dy.$$

Dire se α *è :*

(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 28. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-\sin y}{x^2+(\sin y)^2}dx + \frac{x\cos y}{x^2+(\sin y)^2}dy.$$

Dire se α *è :*

(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 29. *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e sia* α *una* 1*-forma (di classe* C^∞ *su* Ω*).*

$$\alpha = \frac{-\sin(2y)}{x^2+(\sin 2y)^2}dx + \frac{x\cos(2y)}{x^2+(\sin 2y)^2}dy.$$

Dire se α *è :*

(a) chiusa e esatta (in Ω*);*
(b) chiusa, ma non esatta (in Ω*);*
(c) esatta, ma non chiusa (in Ω*);*
(d) ne chiusa, ne esatta (in Ω*).*

Esercizio 30. *Supponiamo che la funzione* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(di classe* C^1*) sia tale che la* 1*-forma*

$$\alpha = x\,dx + a(x)\,dy$$

è esatta. Trovare la funzione a *e una funzione* f *tale che* $df = \alpha$*.*

Esercizio 31. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se la forma*

$$y\,dx + x^2a(y)\,dy$$

è esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 32. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se la forma*
$$y\,dx + xa(y)\,dy$$
è esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 33. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se la forma*
$$xy\,dx + a(y)\,dy$$
è esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 34. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se è possibile che la forma*
$$xy\,dx + a(x)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 35. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se è possibile che la forma*
$$a(x)\,dx + a(y)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 36. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se è possibile che la forma*
$$a(y)\,dx + a(x)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 37. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se è possibile che la forma*
$$a(y)\,dx + a(xy)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 38. *Sia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*. Dire se è possibile che la forma*
$$a(x)\,dx + a(xy)\,dy$$
sia esatta su $\mathbb{R}^2$*.*

1-forme chiuse in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Proposizione 39 (1-forme chiuse in $\mathbb{R}^2$)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *e sia* α *la* 1*-forma*
$$\alpha = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy\,.$$
Allora la forma α *è chiusa se e solo se*
$$\partial_y a = \partial_x b \quad in \quad \Omega.$$

Proposizione 40 (1-forme chiuse in $\mathbb{R}^3$)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^3$ *e sia* α *la* 1*-forma*
$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\,.$$
Allora la forma α *è chiusa se e solo se*
$$\partial_y a = \partial_x b\,, \quad \partial_z a = \partial_x c \quad e \quad \partial_z b = \partial_y c \quad in \quad \Omega.$$