Le formule di Gauss-Green, teorema della divergenza e formula di Stokes

Esercizio 171. *Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo della palla B_1 in senso antioratio. Gli integrali in seguito sono integrali di funzioni su γ. x e y sono le coordinate in $\mathbb{R}^2$. Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?*

(1) $\displaystyle\int_\gamma x^2 = \int_\gamma y^2$

(2) $\displaystyle\int_\gamma xy = \int_\gamma x^2 = \int_\gamma y^2$

(3) $\displaystyle\int_\gamma (x-y)^2 = 2\int_\gamma x^2$

(4) $\displaystyle\int_\gamma (x-y)^2 = 0$

(5) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)^2 = 2\int_\gamma x^2$

(6) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)^2 = 4\int_\gamma x^2.$

(7) $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2) = 2\int_\gamma x^2$

(8) *Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma x^2.$

Esercizio 172. *Sia D il dominio $D = \overline{B}_2 \setminus B_1$ in $\mathbb{R}^2$. Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?*

(1) $\displaystyle\int_D x^2 = \int_D y^2$

(2) $\displaystyle\int_D xy = \int_D x^2 = \int_D y^2$

(3) $\displaystyle\int_D (x-y)^2 = 2\int_D x^2$

(4) $\displaystyle\int_D (x-y)^2 = 0$

(5) $\displaystyle\int_D (x+y)^2 = 2\int_D x^2$

(6) $\displaystyle\int_D (x+y)^2 = 4\int_D x^2.$

(7) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2) = 2\int_D x^2$

(8) *Calcolare* $\displaystyle\int_D x^2.$

Esercizio 173. *Sia D il dominio*

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x^2, y^2).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 174. *Sia D il dominio*

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x, y^2).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 175. *Sia D il dominio*

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x^3, y).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 176. *Sia D il dominio*

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x^3, y).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 177. *Sia D il dominio*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 \right\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x^2, y^2).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 178. *Sia D il dominio*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 \right\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (xy, x^2 + xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 179. *Sia D il dominio*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 \right\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x^2 + y^4, xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 180. *Sia D il dominio*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \right\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x + y, xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 181. *Sia D il dominio*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \right\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Sia α la 1-forma

$$\alpha = xy\, dx + x\, dy.$$

Calcolare

$$\int_\gamma \alpha.$$

Esercizio 182. *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x \Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Sia α la 1-forma

$$\alpha = x^2\,dx + y^2\,dy.$$

Calcolare

$$\int_\gamma \alpha.$$

Esercizio 183. *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x \Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Sia α la 1-forma

$$\alpha = x^2\,dx + xy\,dy.$$

Calcolare

$$\int_\gamma \alpha.$$

Esercizio 184. *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq x \Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Sia α la 1-forma

$$\alpha = x\,dx + xy\,dy.$$

Calcolare

$$\int_\gamma \alpha.$$

Esercizio 185. *Consideriamo la 1-forma*

$$\alpha = xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dx.$$

Per ogni $n \geq 1$ definiamo la curva

$$\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_n(t) = n(\cos t, \sin t)$$

e l'integrale $\displaystyle\int_{\gamma_n} \alpha$. Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(1) la successione I_n è strettamente crescente : $I_n < I_{n+1}$ per ogni n
(2) la successione I_n è strettamente decrescente : $I_n > I_{n+1}$ per ogni n
(3) la successione I_n è costante : $I_n = I_{n+1}$ per ogni n
(4) la successione I_n non è ne crescente, ne decrescente, ne costante.
(5) la successione è crescente, ma non è costante ;
(6) la successione è decrescente, ma non è costante.

Esercizio 186. *Consideriamo la 1-forma*

$$\alpha = xy^2\,dx + (x^4 + y^4)\,dx.$$

Per ogni $n \geq 1$ definiamo la curva

$$\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_n(t) = n(\cos t, \sin t)$$

e l'integrale $\displaystyle\int_{\gamma_n} \alpha$. Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(1) la successione I_n è strettamente crescente : $I_n < I_{n+1}$ per ogni n
(2) la successione I_n è strettamente decrescente : $I_n > I_{n+1}$ per ogni n
(3) la successione I_n è costante : $I_n = I_{n+1}$ per ogni n
(4) la successione I_n non è ne crescente, ne decrescente, ne costante.
(5) la successione è crescente, ma non è costante ;
(6) la successione è decrescente, ma non è costante.

Esercizio 187. *Consideriamo la 1-forma*

$$\alpha = (x^4 + y^4)\, dx + y\, dx.$$

Per ogni $n \geq 1$ definiamo la curva

$$\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_n(t) = n(\cos t, \sin t)$$

e l'integrale $\displaystyle\int_{\gamma_n} \alpha$. *Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?*

(1) la successione I_n è strettamente crescente : $I_n < I_{n+1}$ per ogni n
(2) la successione I_n è strettamente decrescente : $I_n > I_{n+1}$ per ogni n
(3) la successione I_n è costante : $I_n = I_{n+1}$ per ogni n
(4) la successione I_n non è ne crescente, ne decrescente, ne costante.
(5) la successione è crescente, ma non è costante ;
(6) la successione è decrescente, ma non è costante.

Esercizi vari

Esercizio 188. *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ e $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ due curve C^1 a tratti con gli stessi estremi*

$$\gamma(a) = \sigma(a) \quad e \quad \gamma(b) = \sigma(b),$$

e sia $\alpha = u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy$ una 1-forma su $\mathbb{R}^2$. Quali delle affermazioni sono corrette ?

(1) lunghezza(γ) = lunghezza$(\sigma) = b - a$, *ma gli integrali* $\displaystyle\int_\gamma \alpha$ *e* $\displaystyle\int_\sigma \alpha$ *potrebbero essere diversi ;*

(2) *Se*

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = 1 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

allora

$$\int_\gamma \alpha = \text{lunghezza}(\gamma) \quad e \quad \int_\sigma \alpha = \text{lunghezza}(\sigma) \ ;$$

(3) *Se*

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = 1 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

allora

$$\int_\gamma \alpha \leq \text{lunghezza}(\gamma) \quad e \quad \int_\sigma \alpha \leq \text{lunghezza}(\sigma)$$

(4) *Se*

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = 1 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

allora

$$\int_\gamma \alpha \geq \text{lunghezza}(\gamma) \quad e \quad \int_\sigma \alpha \geq \text{lunghezza}(\sigma)$$

(5) *Se*

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) \leq 1 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

allora

$$\int_\gamma \alpha \leq \text{lunghezza}(\gamma) \quad e \quad \int_\sigma \alpha \leq \text{lunghezza}(\sigma)$$

(6) *Se*

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) \geq 1 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

allora

$$\int_\gamma \alpha \geq \text{lunghezza}(\gamma) \quad e \quad \int_\sigma \alpha \geq \text{lunghezza}(\sigma)$$

(7) *Se*

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \text{lunghezza}(\sigma),$$

allora

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

(8) *Se*

$$\text{lunghezza}(\gamma) \geq \text{lunghezza}(\sigma),$$

allora

$$\int_\gamma \alpha \geq \int_\sigma \alpha.$$

(9) *Se la forma α è chiusa, allora*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

(10) *Se la forma α è esatta, allora*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

(11) $\text{lunghezza}(\gamma) = |\gamma(b) - \gamma(a)|$
(12) $\text{lunghezza}(\gamma) \geq |\gamma(b) - \gamma(a)|$
(13) $\text{lunghezza}(\gamma) \leq |\gamma(b) - \gamma(a)|$
(14) *per ogni partizione*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ si ha

$$\text{lunghezza}(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

(15) *per ogni partizione*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ si ha

$$\text{lunghezza}(\gamma) \geq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

(16) *Siano*

$$\mathcal{P} = \Big\{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b \Big\}$$

e

$$\mathcal{Q} = \Big\{ a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_M = b \Big\}$$

due partizioni dell'intervallo $[a, b]$. Se $M > n$, allora

$$\sum_{j=1}^{M} |\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})| \geq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

(17) *Siano*

$$\mathcal{P} = \Big\{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b \Big\}$$

e

$$\mathcal{Q} = \Big\{ a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_M = b \Big\}$$

due partizioni dell'intervallo $[a, b]$. Se $M > n$, allora

$$\sum_{j=1}^{M} |\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

(18) *Siano*

$$\mathcal{P} = \Big\{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b \Big\}$$

e

$$\mathcal{Q} = \Big\{ a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_M = b \Big\}$$

due partizioni dell'intervallo $[a, b]$. Se $\mathcal{P}$ è più fine di $\mathcal{Q}$, allora

$$\sum_{j=1}^{M} |\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})| \geq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

(19) *Siano*

$$\mathcal{P} = \Big\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\Big\}$$

e

$$\mathcal{Q} = \Big\{a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_M = b\Big\}$$

due partizioni dell'intervallo $[a, b]$. *Se* $\mathcal{P}$ *è più fine di* $\mathcal{Q}$, *allora*

$$\sum_{j=1}^{M} |\gamma(s_j) - \gamma(s_{j-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

(20) *Siano* $a = 0$, $b = 6$

$$\mathcal{P} = \Big\{a = 0 < 2 < 4 < 6 = b\Big\}$$

e

$$\mathcal{Q} = \Big\{a = 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 = b\Big\}$$

due partizioni dell'intervallo $[a, b]$. *Allora* $\mathcal{P}$ *è più fine di* $\mathcal{Q}$.

(21) *Siano* $a = 0$, $b = 6$

$$\mathcal{P} = \Big\{a = 0 < 2 < 4 < 6 = b\Big\}$$

e

$$\mathcal{Q} = \Big\{a = 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 = b\Big\}$$

due partizioni dell'intervallo $[a, b]$. *Allora* $\mathcal{Q}$ *è più fine di* $\mathcal{P}$.

Esercizio 189. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Quale delle affermazioni seguenti è vera ?*

(1) F *è integrabile su ogni rettangolo* $[a, b] \times [c, d]$ *in* $\mathbb{R}^2$*;*

(2) F *è integrabile su ogni insieme compatto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *;*

(3) F *è integrabile su ogni insieme compatto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *contenuto in un rettangolo* $[a, b] \times [c, d]$ *;*

(4) F *è integrabile su ogni dominio normale*

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; a \leq x \leq b, \; f(x) \leq y \leq g(x)\Big\}$$

determinato da due funzioni continue $f \leq g$.

(5) F *è integrabile su ogni dominio normale*

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; a \leq x \leq b, \; f(x) \leq y \leq g(x)\Big\}$$

determinato da due funzioni $f \leq g$ *di classe* C^1 *su* $[a, b]$.

(6) F *è integrabile su ogni dominio* $D \subset \mathbb{R}^2$ *di classe* C^1*;*

(7) *Se* D_1 *e* D_2 *sono due domini di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^2$, *allora* F *è integrabile su* $D_1 \cup D_2$ *(esercizio! non l'abbiamo fatto in classe, ma è vero; quale criterio bisogna usare per dimostrarlo?)*

(8) *Se* D_1 *e* D_2 *sono due domini di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^2$, *allora* F *è integrabile su* $D_1 \cap D_2$ *(esercizio! non l'abbiamo fatto in classe, ma è vero; quale criterio bisogna usare per dimostrarlo?)*

(9) *Se* D_1 *e* D_2 *sono due domini normali determinate da funzioni continue, allora* F *è integrabile su* $D_1 \cup D_2$ *(esercizio! non l'abbiamo fatto in classe, ma è vero; quale criterio bisogna usare per dimostrarlo?)*

(10) *Se* D_1 *e* D_2 *sono due domini normali determinate da funzioni continue, allora* F *è integrabile su* $D_1 \cap D_2$ *(esercizio! non l'abbiamo fatto in classe, ma è vero; quale criterio bisogna usare per dimostrarlo?)*

(11) *Un triangolo* T *in* $\mathbb{R}^2$ *non è ne un dominio normale ne un dominio regolare* C^1, *ma è ancora vero che le funzioni continue su* $\overline{T}$ *sono integrabili su* T. *(esercizio! non l'abbiamo fatto in classe, ma è vero; quale criterio bisogna usare per dimostrarlo?)*