Teorema della funzione inversa

Funzioni continue e monotone

Lemma 1. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $c \in (a,b)$. Siano $f:(a,c)\to\mathbb{R}$ e $g:(c,b)\to\mathbb{R}$ due funzioni tali che esistono e sono finiti e uguali i limiti*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad e \qquad \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Sia $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ la funzione definita come

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x\in(a,c),\\ g(x) & se \quad x\in(c,b),\\ L & se \quad x=c. \end{cases}$$

Allora F è continua in c.

Proposizione 2. *Siano (a,b) e (A,B) due intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e sia $f:(a,b)\to(A,B)$ une funzione monotona e surgettiva (per ogni $y\in(A,B)$ esiste $x\in(a,b)$ tale che $f(x)=y$). Allora f è continua.*

Derivate e funzioni monotone

Teorema 3 (Teorema di Lagrange - richiamo)**.** *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su (a,b). Per ogni coppia di punti diversi $x<y$ in (a,b), esiste un punto $z\in(x,y)$ tale che $f'(z)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.*

Teorema 4. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b). Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $f'(x)\ge 0$ *per ogni* $x\in(a,b)$;

(ii) f *è monotona crescente in* (a,b).

Teorema 5. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b). Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $f'(x)\le 0$ *per ogni* $x\in(a,b)$;

(ii) f *è monotona decrescente in* (a,b).

Teorema 6. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b). Se vale*

(i) $f'(x)>0$ *per ogni* $x\in(a,b)$,

allora si ha che

(ii) f *è strettamente crescente in* (a,b).

Teorema 7. *Sia (a,b) un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b). Se vale*

(i) $f'(x)<0$ *per ogni* $x\in(a,b)$,

allora si ha che

(ii) f *è strettamente decrescente in* (a,b).

Teorema della funzione inversa

Teorema 8. *Siano (a,b) e (A,B) due intervalli aperti e sia $f:(a,b)\to(A,B)$ una funzione tale che:*

(a) f è derivabile su (a,b) e $f'(x)>0$ per ogni $x\in(a,b)$;

(b) $\lim_{x\to a} f(x)=A$ e $\lim_{x\to b} f(x)=B$.

Allora, f è bigettiva ed esiste una (unica) funzione $f^{-1}:(A,B)\to(a,b)$ tale che:

(1) $f(f^{-1}(y))=y$ per ogni $y\in(A,B)$;

(2) $f^{-1}(f(x))=x$ per ogni $x\in(a,b)$;

(3) f^{-1} è derivabile su (A,B) e

$$\big(f^{-1}\big)'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\qquad \textit{per ogni}\qquad y\in(A,B).$$

Teorema 9. *La funzione esponenziale reale $f(x)=e^x$, $f:\ (-\infty,+\infty)\to\ (0,+\infty)$ è bigettiva. La sua inversa $f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, detta logaritmo naturale, ha le proprietà seguenti:*

(i) $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ *per ogni* $x>0$;

(ii) $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ *per ogni* $x,y>0$;

(iii) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$ *per ogni* $x>0$.

Teorema 10. *La funzione* $\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ *è bigettiva. La sua inversa è* $\arcsin x$*. Inoltre*

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \textit{per ogni}\quad x\in\ (-1,1).$$

Teorema 11. *La funzione* $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ *è bigettiva. La sua inversa è* $\arccos x$*. Inoltre*

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \textit{per ogni}\quad x\in\ (-1,1).$$

Teorema 12. *La funzione* $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\ \to\ (-\infty,+\infty)$ *è bigettiva. La sua inversa è* $\arctan x$*. Inoltre, si ha che*

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad \textit{per ogni}\quad x\in\mathbb{R}.$$

Esercizi

Esercizio 13. *Derivare le funzioni seguenti*

$(x \ln x - 1)' =$

$\left(e^{1+\ln x}\right)' =$ $\qquad$ $(\sin(\ln x))' =$

$\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)' =$

$\left(\ln(e^{2x} - e^x + 1)\right)' =$

$\left(\ln(x^2)\right)' =$ $\qquad$ $(\ln(\cos x))' =$

$(\ln(\ln x))' =$

$\left(\ln(1 + \sin(x^2))\right)' =$

Esercizio 14. *Trovare la funzione inversa e scrivere la sua derivata.*

(1) $f : \mathbb{R} \to]1, +\infty[\,,\ f(x) = e^x + 1\,;$

(2) $f : \mathbb{R} \to]3, +\infty[\,,\ f(x) = e^{2x} + 3\,;$

(3) $f : \mathbb{R} \to]1, +\infty[\,,\ f(x) = e^{-7x} + 1\,.$

Esercizio 15. *Provare che la funzione* $f : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *è bigettiva e calcolare la derivata della funzione inversa* f^{-1}.

Esercizio 16. *Derivare le funzioni seguenti*

$(x^x)' =$

$\left((1 + x)^{2x}\right)' =$

$\left(x^{1+x}\right)' =$

$\left(x^{\ln x}\right)' =$

$((\sin x)^{\cos x})' =$

Esercizio 17. *Derivare le funzioni seguenti*

$(\arcsin(x))' =$ $\qquad$ $(\arccos(x))' =$

– –

$(\arccos(2x))' =$ $\qquad$ $(\arcsin(7x))' =$

– –

$\big(\arcsin(\sqrt{1+x})\big)' =$

– –

$\big(\arcsin(\sqrt{1+2x})\big)' =$

– –

$(\arctan x)' =$ $\qquad$ $(\arctan(3x))' =$

– –

$(\arctan(2x+1))' =$

– –

$\big(\arctan(\sqrt{x})\big)' =$

– –

$$\left(x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)' =$$

– –

Esercizio 18. *Trovare la funzione inversa di f e scrivere la sua derivata.*

(1) $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (1, +\infty),\ f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$;

(2) $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),\ f(x) = \dfrac{1}{1+\cos(2x)}$.