Teorema di Schauder per soluzioni di problemi ellittici in forma divergenza

1. Introduzione

Setting. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\Omega)$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale continuo su Ω, o più in generale in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot A(x)[\nabla v]\, dx = \int_\Omega f(x) v\, dx - \int_\Omega F(x)\cdot \nabla v\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1_0(\Omega),$$

dove la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:

$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \le i,j \le d.$$

- A è simmetrica:

$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i,j \le d,$$

- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, ovvero esistono costanti $0 < c \le C$ tali che

$$c\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Teorema 1 ($C^{1,\alpha}$ Schauder all'interno). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

---

2. Risultati preliminari

Continuità Lipschitz. Sappiamo già che la soluzione u è Lipschitz continua in Ω.

Cambio delle variabili. Per ogni $x_0 \in \Omega$, esiste una matrice simmetrica $B \in S_d(\mathbb{R})$ che dipende da x_0 (scriveremo anche B_{x_0} al posto di B) ed è tale che

$$B_{x_0} A_{x_0} B_{x_0} = \mathrm{Id}.$$

La funzione

$$v(y) = u(B_{x_0}^{-1} y)$$

è soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\,\nabla v) = g + \mathrm{div}\, G \quad \text{in} \quad B_{x_0}(\Omega),$$

dove $\widetilde{A}$, g e G hanno le proprietà seguenti:

- $\widetilde{A}$ è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica, a coefficienti variabili e con coefficienti in $C^{1,\alpha}$.

$$\widetilde{A}(x) = B_{x_0} A(B_{x_0}^{-1} x) B_{x_0} \quad \text{per ogni} \quad x \in B(\Omega)\ ;$$

$$\widetilde{A}(y_0) = Id \qquad \text{dove} \qquad y_0 = B_{x_0}[x_0]\ .$$

- g è una funzione in $L^p(B(\Omega))$

$$g(y) = f(B_{x_0}^{-1} y)$$

- Il campo G è $C^{0,\beta}$ su $B(\Omega)$ per un qualche $\beta > 0$ universale (ovvero che non dipende dal punto x_0) ed è tale che:
$$F(x) = B_{x_0}[G(B_{x_0}x)] \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Quasi-minimalità. Dato un insieme aperto
$$\omega \Subset \Omega$$
esiste un raggio universale $\rho > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \omega$ ed ogni $R \in (0, \rho)$ si ha che
$$\fint_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le 4C_A R^\alpha \fint_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2\,dx + 4\Big(C_d\|f\|_{L^p(\Omega)}R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big),$$
dove h è la funzione armonica
$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R(x_0), \qquad h = v \quad \text{su} \quad \partial B_R(x_0).$$
Possiamo assumere che esistono due costanti
$$C > 0 \qquad \text{e} \qquad \alpha \in (0,1)$$
che dipendono da Ω e ρ e sono tali che
$$\fint_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le CR^\alpha.$$

Blow-up e differenziabilità. Per ogni $r > 0$ consideriamo la funzione
$$v_r(x) := \frac{1}{r}v(xr).$$
Per ogni successione $r_n \to 0$ ammette una sottosuccessione $(r_n)_n$ tale che
$$v_{r_n} : B_R \to \mathbb{R}$$
converge uniformemente e fortemente in $H^1(B_R)$ ad una qualche funzione lineare
$$v_0 : B_R \to \mathbb{R}.$$
Ogni funzione ottenuta in questo modo si dice blow-up di v in 0.

Formula di Weiss e disuguaglianza epiperimetrica

In questa sezione useremo la formula di Weiss e la disuguaglianza epiperimetrica per ottenere informazione sulla convergenza della successioni di blow-up v_r. Useremo le seguenti proprietà di v_r:

- quasi-minimalità:
$$\int_{B_1} |\nabla v_r|\,dx \le \int_{B_1} |\nabla h_r|^2\,dx + Cr^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,R),$$
dove h_r è la funzione armonica in B_1 con dato al bordo v_r;
- la convergenza forte-$H^1(B_1)$ delle successioni di blow-up v_{r_n};
- il fatto che i blow-up sono minimi (nel nostro caso che sono funzioni armoniche).

2.1. La formula di Weiss e la quasi-minimalità.

Lemma 2. *Per ogni $r \in (0,R)$ abbiamo*
$$\frac{\partial}{\partial r}W(v_r) \ge -dCr^{\alpha-1}.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla formula di Weiss e la quasi-minimalità di v. □

In particolare, esiste il limite
$$\lim_{r\to 0} W(v_r)$$
Inoltre, se per una successione $v_{r_n} \to 0$ si ha che
$$v_{r_n} \to v_0 \quad \text{in} \quad H^1(B_1),$$
dove v_0 è un qualsiasi blow-up di v in 0, allora abbiamo anche
$$\lim_{r\to 0} W(v_r) = \lim_{n\to+\infty} W(v_{r_n}) = W(v_0).$$

Ora, siccome i blow-up sono lineari,

$$W(v_0) = 0$$

e quindi

$$\lim_{r\to 0} W(v_r) = 0.$$

Di conseguenza,

$$W(v_r) \geq -\frac{dC}{\alpha} r^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r \in (0, R). \tag{1}$$

2.2. **Formula di Weiss, quasi-minimalità e disuguaglianza epiperimetrica.** Usando la formula di Weiss, la quasi-minimalità e la disuguaglianza epiperimetrica per l'energia W, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} W(v_r) &= \frac{d}{r}\Big(W(z_r) - W(v_r)\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\
&\geq \frac{d}{r}\Big(\frac{W(h_r)}{1-\varepsilon} - W(v_r)\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\
&\geq \frac{d}{r}\Big(\frac{W(v_r) - Cr^\alpha}{1-\varepsilon} - W(v_r)\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\
&\geq \frac{d}{r}\Big(\varepsilon W(v_r) - Cr^\alpha\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x),
\end{aligned}$$

per ogni

$$\varepsilon \in \left(0\,, \frac{1}{d+1}\right).$$

Scegliendo ε abbastanza piccolo, possiamo supporre che

$$\boxed{\boxed{\gamma := d\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2}}}$$

e dividendo per γ, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W(v_r)}{r^\gamma} + \frac{dC}{\gamma} r^\gamma\right) \geq \frac{1}{r^{1+\gamma}} \int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x). \tag{2}$$

Come conseguenza, otteniamo:

Lemma 3. *La funzione*

$$e(r) := \left(\frac{W(v_r)}{r^\gamma} + \frac{dC}{\gamma} r^\gamma\right)$$

è non-decrescente su $(0, R]$*. Inoltre, da* (1) *segue che*

$$e(r) \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0, R].$$

Lemma 4.

$$\int_0^R \frac{1}{r^{1+\gamma}} \int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla v_r - v_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x)\, dr \leq e(R).$$

Dimostrazione. Usando (2) e la positività di e abbiamo

$$\int_s^R \frac{1}{r^{1+\gamma}} \int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla v_r - v_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x)\, dr = e(R) - e(s) \leq e(R),$$

per ogni $s > 0$. Passando al limite per $s \to 0$, abbiamo la tesi. □

Lemma 5.

$$\|v_t - v_s\|^2_{L^2(\partial B_1)} \leq \frac{C_R}{\gamma} t^\gamma \quad \textit{per ogni} \quad 0 < s < t \leq R.$$

Dimostrazione. Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^d$ calcoliamo

$$\begin{aligned} |v_t(x) - v_s(x)| &\le \int_s^t \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} v(rx) \right) \right| dr \\ &= \int_s^t \frac{1}{r} \left| x \cdot \nabla v(rx) - \frac{1}{r} v(rx) \right| dr = \int_s^t \frac{1}{r} \left| x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x) \right| dr. \end{aligned}$$

Integrando sulla sfera ∂B_1, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} |v_t(x) - v_s(x)|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) &\le \int_{\partial B_1} \left(\int_s^t \frac{1}{r} \left| x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x) \right| dr \right)^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\le \int_{\partial B_1} \left(\int_s^t \frac{1}{r^{1-\gamma}} \, dr \right) \left(\int_s^t \frac{1}{r^{1+\gamma}} \left| x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x) \right|^2 dr \right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\le \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_{\partial B_1} \int_s^t \frac{1}{r^{1+\gamma}} \left| x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x) \right|^2 dr \, d\mathcal{H}^{d-1}(x). \end{aligned}$$

□

---

3. Differenziabilità di u e continuità del gradiente

Proposizione 6. *Per ogni $L > 0$ esistono $\delta > 0$ e $C > 0$ tali che se*

$$\varphi : B_1 \to \mathbb{R} \qquad e \qquad \psi : B_1 \to \mathbb{R}$$

sono due funzioni L-Lipschitziane e tali che

$$\|\varphi - \psi\|_{L^1(B_1)} \le \delta,$$

allora

$$\|\varphi - \psi\|_{L^\infty(B_1)} \le C \|\varphi - \psi\|_{L^1(B_1)}^{\frac{1}{d+1}}.$$

Di conseguenza, abbiamo

Teorema 7. *Sia u la soluzione del problema del Teorema 1. Allora, per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ esistono un raggio $R > 0$ e due costanti $C > 0$ e $\gamma > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $x_0 \in \mathcal{K}$ esiste un'unica funzione lineare*

$$L_{x_0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\left\| \frac{u(x_0 + rx) - u(x_0)}{r} - L_{x_0}(x) \right\|_{L^\infty_x(B_1)} \le C r^\gamma \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0, R).$$

In particolare, u è differenziabile in x_0. Inoltre, il gradiente

$$\nabla u : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^d$$

è una funzione Hölderiana.

Dimostrazione. **Unicità del blow-up.** Siano $x_0 \in \mathcal{K}$ e B_{x_0} la matrice simmetrica tale che

$$B_{x_0} A_{x_0} B_{x_0} = Id.$$

Siano $\widetilde{u}(x) := u(x + x_0) - u(x_0)$ e $v := \widetilde{u} \circ B_{x_0}^{-1}$. Per i risultati della sezione precedente, esistono due costanti C, R che dipendono da $\mathcal{K}$, Ω, A, f ed F tali che

$$\|v_t - v_s\|_{L^2(\partial B_1)} \le t^\gamma \quad \text{per ogni} \quad 0 < s < t < R$$

In particolare, $(v_t)_{t>0}$ è di Cauchy in $L^2(\partial B_1)$ e quindi esiste una funzione

$$v_0 \in L^2(\partial B_1)$$

tale che

$$\|v_t - v_0\|_{L^2(\partial B_1)} \le C t^\gamma \quad \text{per ogni} \quad 0 < t < R.$$

In particolare, v_0 è l'unico blow-up di v in 0 ed è definito su tutto $\mathbb{R}^d$.

Differenziabilità di u. Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |v_r - v_0|^2\,dx &= \frac{1}{r^{d+2}}\int_{B_r} |v - v_0|^2\,dx\\ &= \frac{1}{r^{d+2}}\int_0^r \int_{\partial B_t} |v - v_0|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}\,dt\\ &= \frac{1}{r^{d+2}}\int_0^r t^{d+1}\int_{\partial B_1} |v_t - v_0|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}\,dt\\ &\le \frac{1}{r^{d+2}}\int_0^r t^{d+1} C t^{\gamma}\,dt \le C r^{\gamma}.\end{aligned}$$

Siccome v è L-Lipschitz per una costante di Lipschitz che non dipende dal punto x_0, ma solo da $\mathcal{K}$ e le variabili del problema, abbiamo che esistono costanti $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che

$$\|v_r - v_0\|_{L^\infty(B_1)} \le C r^{\alpha} \quad \text{per ogni} \quad r < R.$$

Ora definiamo la funzione lineare

$$L_{x_0} := v_0 \circ B_{x_0}.$$

Cambiando le variabili, abbiamo che

$$\|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \le C r^{\alpha} \quad \text{per ogni} \quad r < \rho,$$

dove C, α e ρ sono universali per tutti i punti $x_0 \in \mathcal{K}$. Di conseguenza, u è differenziabile in x_0.

Continuità del gradiente. Siano ora x_0 e y_0 due punti di $\mathcal{K}$. Sia $r > 0$. Allora

$$\|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \le C r^{\alpha} \quad \text{e} \quad \|u_{r,y_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \le C r^{\alpha}.$$

Per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\begin{aligned}|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)| = \|L_{x_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} &\le \|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)}\\ &\quad + \|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)}\\ &\quad + \|u_{r,y_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)}\\ &\le 2Cr^{\alpha} + \|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)}.\end{aligned}$$

Osserviamo che siccome u è L-Lipschitz, si ha

$$\begin{aligned}\|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)} &= \frac{1}{r}\sup_{x\in B_1}\Big|\big(u(x_0+rx) - u(x_0)\big) - \big(u(y_0+rx) - u(y_0)\big)\Big|\\ &= \frac{1}{r}\sup_{x\in B_1}\Big(\big|u(x_0+rx) - u(y_0+ry)\big| + \big|u(x_0) - u(y_0)\big|\Big)\\ &\le \frac{1}{r}2L|x_0 - y_0|.\end{aligned}$$

Ora, scegliendo

$$r := |x_0 - y_0|^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

otteniamo

$$|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)| \le 2Cr^{\alpha} + \frac{1}{r}2L|x_0 - y_0| \le (2C + 2L)|x_0 - y_0|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

dove, possiamo la disuguaglianza vale per i punti x_0, y_0 tali che $|x_0 - y_0| \le \rho^{1+\alpha}$. □

Bibliografia

Il risultato del Teorema 1 è classico ed è noto come stima $C^{1,\alpha}$ di Schauder (o anche stima debole di Schauder). Una dimostrazione alternativa può essere trovata in [J].

[J] J. Jost. *Partial differential equations.* Springer-Verlag New York (2002).