Bounded slope condition

Definizione

Definizione 1 (Bounded slope condition). *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diremo che g soddisfa la bounded slope condition, se esiste una costante $S > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esistono due vettori*

$$\underline{\nu} \in \partial B_1 \qquad e \qquad \overline{\nu} \in \partial B_1,$$

tali che

$$S\,\underline{\nu} \cdot (x - x_0) \leq g(x) - g(x_0) \leq S\,\overline{\nu} \cdot (x - x_0) \quad \text{per ogni} \quad x \in \partial\Omega.$$

Osservazione 2. *Una funzione $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ che soddisfa la bounded slope condition è Lipschitziana.*

Osservazione 3. *Osserviamo che la funzione $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ soddisfa la bounded slope condition, se esistono una costante $S > 0$ ed un raggio $R > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esistono due vettori*

$$\underline{\nu} \in \partial B_1 \qquad e \qquad \overline{\nu} \in \partial B_1,$$

tali che

$$S\,\underline{\nu} \cdot (x - x_0) \leq g(x) - g(x_0) \leq S\,\overline{\nu} \cdot (x - x_0) \quad \text{per ogni} \quad x \in B_R(x_0)\partial\Omega.$$

Osservazione 4. *Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Allora, la funzione*

$$g : \partial B_1 \to \mathbb{R}$$

soddisfa la bounded slope condition.

Regolarità Lipschitz fino al bordo

Teorema 5. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Sia*

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R},$$

una funzione che soddisfa la bounded slope condition con costante $S > 0$ e sia $h \in H^1(\Omega)$ la soluzione di

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega\ , \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Allora,

$$|\nabla h| \leq C_d S \qquad su \qquad \Omega,$$

dove C_d è una costante dimensionale. In particolare, $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana.