Regolarità $C^{k,\alpha}$ delle soluzioni di problemi ellittici in forma divergenza

Regolarità $C^{1,\alpha}$

Setting. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed A una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti a_{ij} di A sono funzioni Hölder continue:
$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \le i, j \le d.$$
- A è simmetrica:
$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i, j \le d,$$
- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, ovvero esistono costanti $0 < c \le C$ tali che
$$c\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Useremo il teorema seguente per ottenere la regolarità di ordine superiore delle soluzioni di alcuni problemi ellittici in forma divergenza.

Teorema 1 ($C^{1,\alpha}$ Schauder all'interno)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano*

- *A una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione di
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega,$$
allora esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Stime di Schauder classiche

Teorema 2 (Regolarità $C^{2,\alpha}$ all'interno)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \text{in} \quad \Omega,$$
dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti $C^{1,\alpha}$ per un qualche $\alpha > 0$.*
- *$f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Proof. Applicando Teorema 1, abbiamo che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, d$ e per ogni $D \Subset \Omega$ la derivata debole $\partial_j u$ è in $H^1(D)$ e
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla(\partial_j u)\big) = \mathrm{div}\Big(F_j + (\partial_j A)\nabla u\Big) \qquad \text{in} \qquad \Omega\,,$$
dove i coefficienti della matrice $\partial_j A$ sono le derivate deboli dei coefficienti di A; mentre $F_j(x) = f(x)e_j$ è il campo vettoriale
$$F_j = (0, \dots, f, \dots, 0) : \Omega \to \mathbb{R}^d.$$
Ora, come conseguenza di Teorema 1, abbiamo che $\partial_j u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. □

Come corollario, si ha il risultato seguente.

Teorema 3 (Regolarità $C^{k,\alpha}$ all'interno)**.** *Sia $k > 2$. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \text{in} \quad \Omega,$$
dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti $C^{k-1,\alpha}$ per un qualche $\alpha > 0$.*
- *$f \in C^{k-2,\alpha}(\Omega)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$.