Inf e sup di funzioni di Sobolev - un'identità importante

Teorema 1. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Siano u e v due funzioni in $H_0^1(\Omega)$ (oppure in $H^1(\Omega)$). Allora, $u \vee v$ e $u \wedge v$ sono in $H_0^1(\Omega)$ (oppure in $H^1(\Omega)$) e valgono le formule*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla(u\wedge v)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla(u\vee v)|^2\,dx,$$

$$\int_\Omega u^2\,dx + \int_\Omega v^2\,dx = \int_\Omega (u\wedge v)^2\,dx + \int_\Omega (u\vee v)^2\,dx.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Ricordiamo che $u - v \in H_0^1(\Omega)$

$$(u-v)_+ \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \nabla(u-v)_+ = \mathbb{1}_{\{u>v\}}\nabla(u-v).$$

Ora, la tesi segue dalle identità

$$(u\wedge v) := u - (u-v)_+ \qquad \text{e} \qquad (u\vee v) := v + (u-v)_+. \quad \square$$

Corollario 2. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Siano u e v due funzioni in $H^1(\Omega)$. Sia u_n una successione in $H^1(\Omega)$ che converge a u fortemente in $H^1(\Omega)$. Allora, $u_n \wedge v \to u\wedge v$ e $u_n \vee v \to u \vee v$ fortemente in $H^1(\Omega)$.*

Dimostrazione.

- Siccome valgono le formule del teorema precedente, abbiamo che le successioni $u_n \vee v$ e $u_n \wedge v$ sono limitate in $H^1(\mathbb{R}^d)$.
- Osservimo che valgono e disuguaglianze

$$|u\wedge v - u_n \wedge v| \le |u_n - u| \qquad \text{e} \qquad |u \vee v - u_n \vee v| \le |u_n - u|,$$

  puntualmente in Ω. Di conseguenza, abbiamo che:

  $u_n \wedge v$ converge forte-$L^2(\Omega)$ a $u_n \wedge v$;

  $u_n \vee v$ converge forte-$L^2(\Omega)$ a $u_n \vee v$.
- Dai punti precedenti segue che:

  $u_n \wedge v$ converge debole-$H^1(\Omega)$ a $u_n \wedge v$;

  $u_n \vee v$ converge debole-$H^1(\Omega)$ a $u_n \vee v$.

  In particolare, si ha che

$$\int_\Omega |\nabla(u\wedge v)|^2\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla(u_n \wedge v)|^2\,dx\,, \tag{1}$$

$$\int_\Omega |\nabla(u\vee v)|^2\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla(u_n \vee v)|^2\,dx. \tag{2}$$

- D'altra parte, la convergenza forte $u_n \to u$ (in H^1) implica che

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u\wedge v)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla(u\vee v)|^2\,dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega |\nabla (u_n\wedge v)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla (u_n \vee v)|^2\,dx\Big)\end{aligned}$$

  Quindi entrambe le disuguaglianze (2) e (1) sono uguaglianze. Di conseguenza,

$$u_n \vee v \to u \vee v \quad \text{e} \quad u_n \wedge v \to u \wedge v \quad \text{fortemente in} \quad H^1(\Omega). \quad \square$$

Corollario 3. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e siano u e v due funzioni in $H^1(\mathbb{R}^d)$.*
Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $0 \le v \le u$ su $\mathbb{R}^d$, allora $v \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia φ_n una successione di funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ che converge a u forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$. Siccome il supporto di φ_n è strettamente contenuto in Ω e contiene il supporto di $v \wedge \varphi_n$, abbiamo che $v\wedge\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$. D'altra parte, abbiamo che $v \wedge \varphi_n$ converge fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$ a $u \wedge v = v$. $\square$