Un'applicazione del teorema di regolarità delle soluzioni del problema di Poisson

Gli spazi H^1_0 - definizione

Dato un qualsiasi aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, definiamo lo spazio di Sobolev $H^1_0(\Omega)$ come la chiusura delle funzioni $C^\infty_c(\Omega)$ rispetto alla norma $H^1(\mathbb{R}^d)$ data da

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^2\,dx\right)^{1/2}$$

In particolare, $H^1_0(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ e per ogni funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ si ha che

$$u = 0 \quad \text{Lebesgue quasi-ovunque in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Una caratterizzazione degli spazi $H^1_0(\Omega)$

Dimostreremo il seguente teorema.

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ che soddisfa la stima di densità esterna, ovvero tale che*

Esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0, 1)$ tali che
per ogni $x \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima

$$\big|B_r(x) \cap \Omega\big| \le (1 - c)|B_r|.$$

Allora

$$H^1_0(\Omega) = \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^d) \ : \ u = 0 \ \textit{Lebesgue quasi-ovunque su} \ \mathbb{R}^d \setminus \Omega\Big\}.$$

Osservazione 2. *Osserviamo che basta dimostrare il teorema per domini limitati. Infatti, supponiamo che Ω sia un aperto illimitato ed u una funzione tale che*

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d) \qquad e \qquad u = 0 \quad su \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega\,.$$

Consideriamo una funzione $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\,; \qquad \varphi \equiv 0 \ su\ \mathbb{R}^d \setminus B_2\,; \qquad \varphi \equiv 1 \ su\ B_1\,; \qquad 0 \le \varphi \le 1 \ su\ B_2 \setminus B_1.$$

Per ogni $R > 0$, definiamo la funzione $\varphi_R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ come

$$\varphi_R(x) := \varphi\big(x/R\big) \qquad per\ ogni \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

È immediato verificare che, per $R \to +\infty$,

$$\varphi_R u \to u \qquad fortemente\ in \qquad H^1(\mathbb{R}^d).$$

Ora, siccome

$$\varphi_R u = 0 \quad su \quad \mathbb{R}^d \setminus \big(\Omega \cap B_R\big),$$

e siccome $\Omega \cap B_R$ ha ancora la stima di densità esterna, abbiamo che

$$\varphi_R u \in H^1_0(\Omega \cap B_R),$$

e quindi $\varphi_R u \in H^1_0(\Omega)$. Passando al limite per $R \to +\infty$, otteniamo che $u \in H^1_0(\Omega)$.

Gli spazi $\widetilde{H}^1_0(\Omega)$

Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definiamo

$$\widetilde{H}^1_0(\Omega) := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^d) \ : \ u = 0 \ \text{Lebesgue quasi-ovunque su} \ \mathbb{R}^d \setminus \Omega\Big\}.$$

Osserviamo che $\widetilde{H}^1_0(\Omega)$ sia uno sottospazio lineare chiuso di $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Inoltre, valgono le seguenti proposizioni:

Proposizione 3. *Date due funzioni $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in \widetilde{H}^1_0(\Omega)$, sono equivalenti:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi f \, dx \qquad \textit{per ogni} \qquad \varphi \in \widetilde{H}^1_0(\Omega)\,; \tag{1}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega u f \, dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega v f \, dx \qquad \textit{per ogni} \qquad v \in \widetilde{H}^1_0(\Omega)\,. \tag{2}$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Proposizione 4. *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ ed $f \in L^2(\Omega)$. Allora, esiste un'unica funzione $u \in \widetilde{H}^1_0(\Omega)$ tale per cui valgono (1) e (2). Diremo che u è soluzione debole del problema $-\Delta u = f$ nello spazio $\widetilde{H}^1_0(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per esercizio. □

Proposizione 5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato che soddisfa la stima di densità esterna. Sia $f \in L^p(\Omega)$, per un qualche $p \ge d/2$. Sia $u \in \widetilde{H}^1_0(\Omega)$ la soluzione debole del problema $-\Delta u = f$ in $\widetilde{H}^1_0(\Omega)$. Allora,*

(i) *$u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ per un qualche $\alpha > 0$;*
(ii) *$u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$;*
(iii) *$u \in H^1_0(\Omega)$.*

Dimostrazione. I primi due punti sono il teorema di regolarità che dimostreremo in seguito. Il punto (iii) segue da (i) e (ii) ed il lemma seguente. □

Lemma 6. *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ ed u una funzione tale che*

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \qquad \textit{e} \qquad u \equiv 0 \quad \textit{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Allora $u \in H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione. Siccome la parte positiva e quella negativa di u hanno la stesse proprietà:

$$u_\pm \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad u_\pm \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega,$$

basta dimostrare il teorema nel caso $u \ge 0$. Dato un $t > 0$, consideriamo la funzione

$$u_t := (u - t)_+.$$

Allora,

$$u_t \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad u_t \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus K_t,$$

dove K_t è l'insieme compatto

$$K_t := \{u \ge t\}.$$

Osserviamo inoltre, che K_t è incluso in Ω. Di conseguenza, la distanza

$$\delta := \text{dist}\Big(K_t; \mathbb{R}^d \setminus \Omega\Big) = \min\Big\{|x - y| \ : \ x \in K_t, \ y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega_t\Big\},$$

è strettamente positiva. Consideriamo ora una funzione

$$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\,; \qquad \phi \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^d \setminus B_1\,; \qquad \phi \ge 0 \text{ su } \mathbb{R}^d\,; \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \, dx = 1,$$

e definiamo

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\phi(x/\varepsilon).$$

Allora,

$$\phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\,; \qquad \phi_\varepsilon \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon\,; \qquad \phi_\varepsilon \ge 0 \text{ su } \mathbb{R}^d\,; \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x) \, dx = 1.$$

Inoltre,

- $u_t * \phi_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$;
- per $\varepsilon \to 0$, $u_t * \phi_\varepsilon$ converge a u_t fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Ora, osserviamo che per $\varepsilon < \delta$ il supporto di $u_t * \phi_\varepsilon$ è contenuto in Ω, ovvero $u_t * \phi_\varepsilon \in C^\infty_c(\Omega)$. Si ha quindi che per definizione $u_t \in H^1_0(\Omega)$. Infine, per concludere basta osservare che per $t \to 0$, la funzione u_t converge a u fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$. □

Dimostrazione del Teorema 1

Sia $u \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$. Dimostreremo che $u \in H_0^1(\Omega)$. Siccome $u_\pm \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$, basta considerare il caso

$$u \geq 0 \qquad \text{su} \qquad \mathbb{R}^d.$$

Step 1. Supponiamo che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e poniamo $M := \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Per ogni $n \geq 1$, consideriamo il funzionale

$$J_n : \widetilde{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \ , \qquad J_n(v) := \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + n \int_\Omega |u - v|^2 \, dx.$$

Osserviamo che (per ogni fissato $n \geq 1$) esiste un'unica funzione $u_n \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$ tale che

$$J_n(u_n) \leq J_n(v) \qquad \text{per ogni} \qquad v \in \widetilde{H}_0^1(\Omega).$$

Siccome

$$J(u_n \vee 0) \leq J(u_n) \qquad \text{e} \qquad J(u_n \wedge M) \leq J(u_n),$$

abbiamo che necessariamente

$$0 \leq u_n \leq M \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d.$$

Step 2. Siccome, per ogni $\varphi \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$ si ha che il minimo della funzione

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto J_n(u_n + t\varphi),$$

è raggiunto in $t = 0$, abbiamo che

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx = n \int_\Omega \varphi(u - u_n) \, dx,$$

ovvero u_n è soluzione debole in $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ del problema

$$-\Delta u_n = n(u - u_n).$$

Siccome $n(u - u_n)$ è una funzione limitata, possiamo applicare Proposizione 5 ottenendo che

$$u_n \in H_0^1(\Omega).$$

Step 3. Osserviamo che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$J_n(u_n) \leq J_n(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + n \int_\Omega |u - u|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

In particolare,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega |u_n - u|^2 \, dx \leq \frac{1}{n} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx. \tag{3}$$

La seconda disuguaglianza implica che

$$u_n \to u \qquad \text{forte in } L^2(\Omega).$$

Ora, questa informazione, insieme alla prima disuguaglianza implica che le norme H^1 di u_n sono limitate e quindi

$$u_n \to u \qquad \text{debole in } H^1(\mathbb{R}^d).$$

Per la semincontinuità delle norme H^1, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \, dx.$$

Usando di nuovo la prima disuguaglianza di (3), otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \, dx.$$

Di conseguenza, $u_n \to u$ forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$. In particolare, siccome $u_n \in H_0^1(\Omega)$, questo implica che

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

Step 4. Sia ora u una qualsiasi funzione non-negativa in $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$. Per ogni $M > 0$ consideriamo la funzione $u \wedge M$. È immediato verificare che $u \wedge M \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$. Di conseguenza, per quello che abbiamo appena dimostrato, $u \wedge M \in H_0^1(\Omega)$. D'altra parte, per $M \to +\infty$, $u \wedge M$ converge forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$ a u. Quindi anche $u \in H_0^1(\Omega)$.