

Numeri complessi - Parte II

Forma trigonometrica e forma esponenziale

Sia $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) un numero complesso. Useremo la lettera ρ per indicare il modulo di z

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Supponiamo che $\rho > 0$. Allora possiamo scrivere z come

$$z = \rho \left(\frac{a}{\rho} + i \frac{b}{\rho} \right).$$

Osserviamo che

$$\left(\frac{a}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{b}{\rho} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{\rho^2} = 1.$$

Di conseguenza, esiste un unico numero reale θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{b}{\rho}.$$

In particolare, il numero complesso z si può scrivere nel modo seguente:

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta). \quad \text{(forma trigonometrica)}$$

Usando il fatto che

$$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{e} \quad \sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}),$$

possiamo riscrivere z come segue:

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \text{(forma esponenziale)}$$

dove:

- $\rho \geq 0$ è il modulo di z ;
- $\theta \in [0, 2\pi)$ è l'argomento di z .

Esempi:

$$\text{(forma esponenziale)} \quad e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 + 0 \cdot i = 1 \quad \text{(forma algebrica)}$$

$$\text{(forma esponenziale)} \quad e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + 0 \cdot i = -1 \quad \text{(forma algebrica)}$$

$$\text{(forma esponenziale)} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 \cdot i = i \quad \text{(forma algebrica)}$$

$$\text{(forma esponenziale)} \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(forma algebrica)}$$

$$\text{(forma esponenziale)} \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(forma algebrica)}$$

$$\text{(forma esponenziale)} \quad e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \quad \text{(forma algebrica)}$$

$$\text{(forma esponenziale)} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i \quad \text{(forma algebrica)}$$

Numeri complessi in forma esponenziale. Proprietà

Sia $z = \rho e^{i\theta}$ un numero complesso in forma esponenziale. Allora si ha:

- $|z| = \rho$ (modulo);
- $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ (argomento);
- $Re(z) = \rho \cos \theta$ (parte reale);
- $Im(z) = \rho \sin \theta$ (parte immaginaria);
- (inverso) se $z \neq 0$, allora $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$;
- (prodotto) se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, allora $z_1 z_2 = (\rho_1 \rho_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;
- (potenza intera) se $n \in \mathbb{N}$, allora $z^n = \rho^n e^{in\theta}$.

Esercizi

Esercizio 1. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi seguenti:

$$e^{2i\pi} =$$

$$e^{i\pi} =$$

$$e^{-i\pi} =$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} =$$

$$2e^{i\frac{2\pi}{3}} =$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} =$$

$$e^{i\frac{\pi}{6}} =$$

$$2e^{i\frac{7\pi}{6}} =$$

Esercizio 2. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi seguenti:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} =$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} =$$

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} =$$

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} =$$

$$e^{i\frac{5\pi}{6}} =$$

$$e^{-i\frac{\pi}{6}} =$$

Esercizio 3. Scrivere in forma esponenziale i numeri complessi seguenti:

$$i = \quad \quad \quad -1 = \quad \quad \quad -i =$$

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \quad \quad \quad \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \quad \quad \quad (e^{i\frac{\pi}{6}})^{-2} =$$

$$(e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = \quad \quad \quad (e^{i\frac{\pi}{3}})^7 =$$

$$(2e^{i\frac{\pi}{7}})^{-3} = \quad \quad \quad \overline{\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-2}} =$$

$$\left(\frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{-2} =$$

$$\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{3e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{-1} =$$

$$-2e^{i\frac{\pi}{3}} = \quad \quad \quad ie^{-i\frac{\pi}{6}} =$$

$$-ie^{i\frac{\pi}{4}} = \quad \quad \quad (-i)^7 =$$

$$\frac{(ie^{i\frac{\pi}{3}})^6}{(-e^{i\frac{2\pi}{3}})^{-2}} =$$

Esercizio 4. Scrivere in forma esponenziale i numeri complessi seguenti:

$$(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3 = \quad \quad \quad (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{-3} =$$

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{(e^{i\frac{\pi}{8}})^2} = \quad \quad \quad (e^{i\frac{\pi}{3}})^3 (e^{i\frac{\pi}{2}})^3 =$$

$$(e^{-i\frac{\pi}{4}})^6 (e^{i\frac{\pi}{2}})^6 =$$

$$\overline{(3e^{i\frac{\pi}{3}})^2} = \quad \quad \quad \overline{(2e^{i\frac{3\pi}{4}})^{-2}} =$$

$$\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{-2} =$$

$$\frac{(e^{i\frac{\pi}{3}})^5}{(e^{i\frac{2\pi}{3}})^7 (e^{-i\frac{\pi}{3}})^4} =$$

$$(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{-3} (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}})^4 =$$

Esercizio 5. Scrivere in forma esponenziale i numeri complessi seguenti:

$$1 + i = \quad \quad \quad 1 - i = \quad \quad \quad \frac{1}{1 + i} =$$

$$-2 + 2i = \quad \quad \quad (1 + i)^9 =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \quad \quad \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i =$$

$$i + \sqrt{3} =$$

$$\frac{1 + i}{i + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{(-1 + i)^4}{1 + i\sqrt{3}} =$$

$$(1 - i\sqrt{3})^{10} =$$

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^5}{(1 - i\sqrt{3})^5} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{17} =$$

Esercizio 6. Scrivere in forma esponenziale i numeri complessi seguenti:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + i) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

$$(1 + i)e^{i\frac{\pi}{3}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} - i} =$$

$$\frac{1 - i}{i - \sqrt{3}} =$$

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^8}{(\sqrt{3} - i)^8} =$$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{57} =$$