

Teorema di Schauder per soluzioni di problemi ellittici in forma divergenza

1. INTRODUZIONE

Setting. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\Omega)$ e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale continuo su Ω , o più in generale in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega,$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot A(x)[\nabla v] \, dx = \int_{\Omega} f(x)v \, dx - \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v \, dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega),$$

dove la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:

$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici } 1 \leq i, j \leq d.$$

- A è simmetrica:

$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq d,$$

- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , ovvero esistono costanti $0 < c \leq C$ tali che

$$c \operatorname{Id} \leq A(x) \leq C \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Teorema 1 ($C^{1,\alpha}$ Schauder all'interno). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega,$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , con coefficienti Hölder.
- $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.
- $F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

2. RISULTATI PRELIMINARI

Continuità Lipschitz. Sappiamo già che la soluzione u è Lipschitz continua in Ω .

Cambio delle variabili. Per ogni $x_0 \in \Omega$, esiste una matrice simmetrica $B \in S_d(\mathbb{R})$ che dipende da x_0 (scriveremo anche B_{x_0} al posto di B) ed è tale che

$$B_{x_0} A_{x_0} B_{x_0} = \operatorname{Id}.$$

La funzione

$$v(y) = u(B_{x_0}^{-1}y)$$

è soluzione di

$$-\operatorname{div}(\tilde{A} \nabla v) = g + \operatorname{div} G \quad \text{in } B_{x_0}(\Omega),$$

dove $\tilde{A}$, g e G hanno le proprietà seguenti:

- $\tilde{A}$ è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica, a coefficienti variabili e con coefficienti in $C^{1,\alpha}$.

$$\tilde{A}(x) = B_{x_0} A(B_{x_0}^{-1}x) B_{x_0} \quad \text{per ogni } x \in B(\Omega);$$

$$\tilde{A}(y_0) = \operatorname{Id} \quad \text{dove } y_0 = B_{x_0}[x_0].$$

- g è una funzione in $L^p(B(\Omega))$

$$g(y) = f(B_{x_0}^{-1}y)$$

- Il campo G è $C^{0,\beta}$ su $B(\Omega)$ per un qualche $\beta > 0$ universale (ovvero che non dipende dal punto x_0) ed è tale che:

$$F(x) = B_{x_0}[G(B_{x_0}x)] \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Quasi-minimalità. Dato un insieme aperto

$$\omega \subseteq \Omega$$

esiste un raggio universale $\rho > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \omega$ ed ogni $R \in (0, \rho)$ si ha che

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2 dx \leq 4C_A R^\alpha \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 dx + 4 \left(C_d \|f\|_{L^p(\Omega)} R^{1-d/p} + C_F R^\beta \right),$$

dove h è la funzione armonica

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_R(x_0), \quad h = v \quad \text{su } \partial B_R(x_0).$$

Possiamo assumere che esistono due costanti

$$C > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \in (0, 1)$$

che dipendono da Ω e ρ e sono tali che

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2 dx \leq C R^\alpha.$$

Blow-up e differenziabilità. Per ogni $r > 0$ consideriamo la funzione

$$v_r(x) := \frac{1}{r} v(xr).$$

Per ogni successione $r_n \rightarrow 0$ ammette una sottosuccessione $(r_n)_n$ tale che

$$v_{r_n} : B_R \rightarrow \mathbb{R}$$

converge uniformemente e fortemente in $H^1(B_R)$ ad una qualche funzione lineare

$$v_0 : B_R \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ogni funzione ottenuta in questo modo si dice blow-up di v in 0.

FORMULA DI WEISS E DISUGUAGLIANZA EPIPERIMETRICA

In questa sezione useremo la formula di Weiss e la disuguaglianza epiperimetrica per ottenere informazione sulla convergenza della successioni di blow-up v_r . Useremo le seguenti proprietà di v_r :

- quasi-minimalità:

$$\int_{B_1} |\nabla v_r| dx \leq \int_{B_1} |\nabla h_r|^2 dx + C r^\alpha \quad \text{per ogni } r \in (0, R),$$

dove h_r è la funzione armonica in B_1 con dato al bordo v_r ;

- la convergenza forte- $H^1(B_1)$ delle successioni di blow-up v_{r_n} ;
- il fatto che i blow-up sono minimi (nel nostro caso che sono funzioni armoniche).

2.1. La formula di Weiss e la quasi-minimalità.

Lemma 2. Per ogni $r \in (0, R)$ abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial r} W(v_r) \geq -d C r^{\alpha-1}.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla formula di Weiss e la quasi-minimalità di v . □

In particolare, esiste il limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} W(v_r)$$

Inoltre, se per una successione $v_{r_n} \rightarrow 0$ si ha che

$$v_{r_n} \rightarrow v_0 \quad \text{in } H^1(B_1),$$

dove v_0 è un qualsiasi blow-up di v in 0, allora abbiamo anche

$$\lim_{r \rightarrow 0} W(v_r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} W(v_{r_n}) = W(v_0).$$

Ora, siccome i blow-up sono lineari,

$$W(v_0) = 0$$

e quindi

$$\lim_{r \rightarrow 0} W(v_r) = 0.$$

Di conseguenza,

$$(1) \quad W(v_r) \geq -\frac{dC}{\alpha} r^\alpha \quad \text{per ogni } r \in (0, R).$$

2.2. Formula di Weiss, quasi-minimalità e disuguaglianza epiperimetrica. Usando la formula di Weiss, la quasi-minimalità e la disuguaglianza epiperimetrica per l'energia W , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} W(v_r) &= \frac{d}{r} \left(W(z_r) - W(v_r) \right) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\geq \frac{d}{r} \left(\frac{W(h_r)}{1-\varepsilon} - W(v_r) \right) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\geq \frac{d}{r} \left(\frac{W(v_r) - Cr^\alpha}{1-\varepsilon} - W(v_r) \right) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\geq \frac{d}{r} \left(\varepsilon W(v_r) - Cr^\alpha \right) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x), \end{aligned}$$

per ogni

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{d+1} \right).$$

Scegliendo ε abbastanza piccolo, possiamo supporre che

$$\boxed{\gamma := d\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2}}$$

e dividendo per γ , otteniamo

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W(v_r)}{r^\gamma} + \frac{dC}{\gamma} r^\gamma \right) \geq \frac{1}{r^{1+\gamma}} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x).$$

Come conseguenza, otteniamo:

Lemma 3. *La funzione*

$$e(r) := \left(\frac{W(v_r)}{r^\gamma} + \frac{dC}{\gamma} r^\gamma \right)$$

è non-decrescente su $(0, R]$. Inoltre, da (1) segue che

$$e(r) \geq 0 \quad \text{per ogni } r \in (0, R].$$

Lemma 4.

$$\int_0^R \frac{1}{r^{1+\gamma}} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla v_r - v_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) dr \leq e(R).$$

Dimostrazione. Usando (2) e la positività di e abbiamo

$$\int_s^R \frac{1}{r^{1+\gamma}} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla v_r - v_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) dr = e(R) - e(s) \leq e(R),$$

per ogni $s > 0$. Passando al limite per $s \rightarrow 0$, abbiamo la tesi. $\square$

Lemma 5.

$$\|v_t - v_s\|_{L^2(\partial B_1)}^2 \leq \frac{C_R}{\gamma} t^\gamma \quad \text{per ogni } 0 < s < t \leq R.$$

Dimostrazione. Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^d$ calcoliamo

$$\begin{aligned} |v_t(x) - v_s(x)| &\leq \int_s^t \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} v(rx) \right) \right| dr \\ &= \int_s^t \frac{1}{r} \left| x \cdot \nabla v(rx) - \frac{1}{r} v(rx) \right| dr = \int_s^t \frac{1}{r} |x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x)| dr. \end{aligned}$$

Integrando sulla sfera ∂B_1 , otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} |v_t(x) - v_s(x)|^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) &\leq \int_{\partial B_1} \left(\int_s^t \frac{1}{r} |x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x)| dr \right)^2 d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\leq \int_{\partial B_1} \left(\int_s^t \frac{1}{r^{1-\gamma}} dr \right) \left(\int_s^t \frac{1}{r^{1+\gamma}} |x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x)|^2 dr \right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\leq \frac{t^\gamma}{\gamma} \int_{\partial B_1} \int_s^t \frac{1}{r^{1+\gamma}} |x \cdot \nabla v_r(x) - v_r(x)|^2 dr d\mathcal{H}^{d-1}(x). \end{aligned} \quad \square$$

3. DIFFERENZIABILITÀ DI u E CONTINUITÀ DEL GRADIENTE

Proposizione 6. Per ogni $L > 0$ esistono $\delta > 0$ e $C > 0$ tali che se

$$\varphi : B_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad \psi : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

sono due funzioni L -Lipschitziane e tali che

$$\|\varphi - \psi\|_{L^1(B_1)} \leq \delta,$$

allora

$$\|\varphi - \psi\|_{L^\infty(B_1)} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^1(B_1)}^{\frac{1}{d+1}}.$$

Di conseguenza, abbiamo

Teorema 7. Sia u la soluzione del problema del Teorema 1. Allora, per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ esistono un raggio $R > 0$ e due costanti $C > 0$ e $\gamma > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $x_0 \in \mathcal{K}$ esiste un'unica funzione lineare

$$L_{x_0} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\left\| \frac{u(x_0 + rx) - u(x_0)}{r} - L_{x_0}(x) \right\|_{L_x^\infty(B_1)} \leq Cr^\gamma \quad \text{per ogni } r \in (0, R).$$

In particolare, u è differenziabile in x_0 . Inoltre, il gradiente

$$\nabla u : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

è una funzione Hölderiana.

Dimostrazione. Unicità del blow-up. Siano $x_0 \in \mathcal{K}$ e B_{x_0} la matrice simmetrica tale che

$$B_{x_0} A_{x_0} B_{x_0} = Id.$$

Siano $\tilde{u}(x) := u(x + x_0) - u(x_0)$ e $v := \tilde{u} \circ B_{x_0}^{-1}$. Per i risultati della sezione precedente, esistono due costanti C, R che dipendono da $\mathcal{K}, \Omega, A, f$ ed F tali che

$$\|v_t - v_s\|_{L^2(\partial B_1)} \leq t^\gamma \quad \text{per ogni } 0 < s < t < R$$

In particolare, $(v_t)_{t>0}$ è di Cauchy in $L^2(\partial B_1)$ e quindi esiste una funzione

$$v_0 \in L^2(\partial B_1)$$

tale che

$$\|v_t - v_0\|_{L^2(\partial B_1)} \leq Ct^\gamma \quad \text{per ogni } 0 < t < R.$$

In particolare, v_0 è l'unico blow-up di v in 0 ed è definito su tutto $\mathbb{R}^d$.

Differenziabilità di u . Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |v_r - v_0|^2 dx &= \frac{1}{r^{d+2}} \int_{B_r} |v - v_0|^2 dx \\
&= \frac{1}{r^{d+2}} \int_0^r \int_{\partial B_t} |v - v_0|^2 d\mathcal{H}^{d-1} dt \\
&= \frac{1}{r^{d+2}} \int_0^r t^{d+1} \int_{\partial B_1} |v_t - v_0|^2 d\mathcal{H}^{d-1} dt \\
&\leq \frac{1}{r^{d+2}} \int_0^r t^{d+1} C t^\gamma dt \leq C r^\gamma.
\end{aligned}$$

Siccome v è L -Lipschitz per una costante di Lipschitz che non dipende dal punto x_0 , ma solo da $\mathcal{K}$ e le variabili del problema, abbiamo che esistono costanti $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che

$$\|v_r - v_0\|_{L^\infty(B_1)} \leq C r^\alpha \quad \text{per ogni } r < R.$$

Ora definiamo la funzione lineare

$$L_{x_0} := v_0 \circ B_{x_0}.$$

Cambiando le variabili, abbiamo che

$$\|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \leq C r^\alpha \quad \text{per ogni } r < \rho,$$

dove C , α e ρ sono universali per tutti i punti $x_0 \in \mathcal{K}$. Di conseguenza, u è differenziabile in x_0 .

Continuità del gradiente. Siano ora x_0 e y_0 due punti di $\mathcal{K}$. Sia $r > 0$. Allora

$$\|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \leq C r^\alpha \quad \text{e} \quad \|u_{r,y_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \leq C r^\alpha.$$

Per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)| &= \|L_{x_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\quad + \|u_{r,y_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\quad + \|u_{r,y_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\leq 2C r^\alpha + \|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che siccome u è L -Lipschitz, si ha

$$\begin{aligned}
\|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)} &= \frac{1}{r} \sup_{x \in B_1} |(u(x_0 + rx) - u(x_0)) - (u(y_0 + rx) - u(y_0))| \\
&= \frac{1}{r} \sup_{x \in B_1} (|u(x_0 + rx) - u(y_0 + rx)| + |u(x_0) - u(y_0)|) \\
&\leq \frac{1}{r} 2L|x_0 - y_0|.
\end{aligned}$$

Ora, scegliendo

$$r := |x_0 - y_0|^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

otteniamo

$$|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)| \leq 2C r^\alpha + \frac{1}{r} 2L|x_0 - y_0| \leq (2C + 2L)|x_0 - y_0|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

dove, possiamo la disuguaglianza vale per i punti x_0, y_0 tali che $|x_0 - y_0| \leq \rho^{1+\alpha}$. □

BIBLIOGRAFIA

Il risultato del Teorema 1 è classico ed è noto come stima $C^{1,\alpha}$ di Schauder (o anche stima debole di Schauder). Una dimostrazione alternativa può essere trovata in [J].

[J] J. Jost. *Partial differential equations*. Springer-Verlag New York (2002).