

DISUGUAGLIANZA EPIPERIMETRICA

Per ogni $u \in H^1(B_1)$ definiamo il funzionale

$$W(u) := \int_{B_1} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial B_1} u^2 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Teorema 1 (Disuguaglianza epiperimetrica). *Esiste una costante dimensionale $\varepsilon \in (0, 1)$ tale che per ogni funzione 1-omogenea $z : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $z \in H^1(B_1)$, esiste una funzione $h : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$h = z \quad \text{su} \quad \partial B_1 \quad \text{e} \quad W(h) \leq (1 - \varepsilon)W(z).$$

Proof. Se $W(z) \leq 0$, possiamo scegliere il competitore h semplicemente come $h = z$.

Supponiamo quindi che

$$W(z) > 0.$$

Osserviamo che possiamo scrivere

$$z(r, \theta) = r\phi(\theta) \quad \text{per ogni} \quad r \in (0, 1), \quad \theta \in \partial B_1,$$

dove $\phi \in H^1(\partial B_1)$. Consideriamo lo sviluppo di ϕ in armoniche sferiche su ∂B_1 .

$$\phi(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \phi_k(\theta).$$

Allora, l'energia della funzione 1-omogenea z è data da

$$\begin{aligned} W(z) &= \int_{B_1} |\nabla z|^2 dx - \int_{\partial B_1} z^2 \\ &= \int_0^1 r^{d-1} \int_{\partial B_1} \left(\phi^2(\theta) + |\nabla_\theta \phi(\theta)|^2 \right) d\theta dr - \int_{\partial B_1} \phi^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \left(|\nabla_\theta \phi(\theta)|^2 - (d-1)\phi^2(\theta) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Usando lo sviluppo di ϕ in armoniche sferiche, otteniamo

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \left(|\nabla_\theta \phi_k(\theta)|^2 - (d-1)\phi_k^2(\theta) \right) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d} \left(\lambda_k - (d-1) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d} \left(\alpha_k(\alpha_k + d - 2) - (d-1) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \frac{1}{d} (\alpha_k - 1)(\alpha_k + (d-1)). \end{aligned}$$

Consideriamlo ora la funzione armonica

$$h(r, \theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^{\alpha_k} \phi_k(\theta).$$

L'energia di h è data da

$$W(h) = \int_{B_1} |\nabla h|^2 dx - \int_{\partial B_1} h^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 (\alpha_k - 1).$$

Se $\alpha_k = 1$, allora abbiamo

$$\frac{1}{d} (\alpha_k - 1)(\alpha_k + d - 1) = 0 = \alpha_k - 1.$$

Per $\alpha_0 = 0$, invece,

$$\frac{1}{d} (\alpha_0 - 1)(\alpha_0 + d - 1) = -\frac{d-1}{d} \quad \text{e} \quad \alpha_0 - 1 = -1.$$

Per tutti gli altri indici k tali che $\alpha_k \geq 2$, si ha

$$\begin{aligned}
 (\alpha_k - 1) - (1 - \varepsilon) \frac{1}{d} (\alpha_k - 1) (\alpha_k + (d - 1)) &= \frac{\alpha_k - 1}{d} \left(d - (1 - \varepsilon) (\alpha_k + (d - 1)) \right) \\
 &= \frac{\alpha_k - 1}{d} \left(1 - (1 - \varepsilon) \alpha_k + \varepsilon (d - 1) \right) \\
 &\leq \frac{\alpha_k - 1}{d} \left(1 - (1 - \varepsilon) 2 + \varepsilon (d - 1) \right) \\
 &\leq \frac{\alpha_k - 1}{d} \left(-1 + \varepsilon (d + 1) \right),
 \end{aligned}$$

Quindi, basta scegliere

$$\varepsilon = \frac{1}{d + 1}.$$

□

BIBLIOGRAFIA

La disuguaglianza epiperimetrica è stata introdotta da Reifenberg in [R] per lo studio della regolarità delle superfici minime. Con i metodi di [W] e [SV] questo strumento ha trovato applicazione in diversi problemi a frontiera libera (vedi per esempio la bibliografia di [SV2]).

- [R] E. R. Reifenberg. *An epiperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces*. Ann. of Math. **80** (1964), 1–14.
- [SV] L. Spolaor, B. Velichkov. *An epiperimetric inequality for the regularity of some free boundary problems: the 2-dimensional case*. Comm. Pure Appl. Math. **72** (2) (2019) 375–421.
- [SV2] L. Spolaor, B. Velichkov. *On the logarithmic epiperimetric inequality for the obstacle problem*. Math. Eng. **3** (2021), 1–42.
- [W] G. S. Weiss. *A homogeneity improvement approach to the obstacle problem*. Invent. Math. **138** (1) (1999), 23–50.