

Spazi di Sobolev sulla sfera unitaria

DARIVATA RADIALE E DERIVATA TANGENZIALE

Proposizione 1. Sia $\varphi : \partial B_R \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che φ ammette un'estensione di classe C^1 su $\mathbb{R}^d$, ovvero supponiamo che esiste una funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$u = \varphi \quad \text{su} \quad \partial B_R.$$

Allora, per ogni $\theta \in \partial B_1$ esiste un'unico vettore $V \in \mathbb{R}^d$ tale per cui

$$\varphi\left(R \frac{\theta + h}{|\theta + h|}\right) = \varphi(R\theta) + h \cdot V + o(|h|) \quad \text{per ogni} \quad h \perp \theta.$$

Diremo che il vettore V è il **gradiente tangenziale** di φ nel punto $R\theta$ e lo denoteremo con $\nabla_\theta \varphi(R\theta)$. Inoltre, $V = \nabla_\theta \varphi(R\theta)$ è dato da

$$\nabla_\theta \varphi(R\theta) := R \left(\nabla u(R\theta) - (\theta \cdot \nabla u(R\theta)) \theta \right),$$

e la funzione

$$\nabla_\theta \varphi : \partial B_R \rightarrow \mathbb{R}^d$$

è continua. Osserviamo che questa definizione dipende solo dalla funzione φ e non dall'estensione u .

Dimostrazione. Per ogni $h \in \mathbb{R}^d$, la differenziabilità di u implica

$$u\left(R \frac{\theta + h}{|\theta + h|}\right) = u(R\theta) + R \left(\frac{\theta + h}{|\theta + h|} - \theta \right) \cdot \nabla u(R\theta) + o\left(R \frac{\theta + h}{|\theta + h|} - R\theta\right).$$

D'altra parte

$$|\theta + h| = \sqrt{1 + 2\theta \cdot h + |h|^2} = 1 + \theta \cdot h + o(|h|).$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\theta + h}{|\theta + h|} - \theta &= \frac{\theta + h - \theta|\theta + h|}{|\theta + h|} \\ &= \frac{\theta + h - \theta(1 + \theta \cdot h + o(|h|))}{|\theta + h|} \\ &= \left(\theta + h - \theta(1 + \theta \cdot h + o(|h|)) \right) (1 - \theta \cdot h + o(|h|)) = h - (\theta \cdot h)\theta + o(|h|). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \varphi\left(R \frac{\theta + h}{|\theta + h|}\right) &= u\left(R \frac{\theta + h}{|\theta + h|}\right) = u(R\theta) + R \left(h - (\theta \cdot h)\theta \right) \cdot \nabla u(R\theta) + o(|h|) \\ &= u(R\theta) + Rh \cdot \left(\nabla u(R\theta) - (\theta \cdot \nabla u(R\theta))\theta \right) + o(|h|) \\ &= \varphi(R\theta) + Rh \cdot \left(\nabla u(R\theta) - (\theta \cdot \nabla u(R\theta))\theta \right) + o(|h|). \end{aligned}$$

Siccome esiste al più un vettore $V \in \mathbb{R}^d$ tale che $V \perp \theta$ e

$$\varphi\left(R \frac{\theta + h}{|\theta + h|}\right) = \varphi(R\theta) + h \cdot V + o(|h|) \quad \text{per ogni} \quad h \perp \theta,$$

abbiamo che il gradiente tangenziale di φ in $R\theta$ esiste ed è dato da

$$\nabla_\theta \varphi(R\theta) := R \left(\nabla u(R\theta) - (\theta \cdot \nabla u(R\theta)) \theta \right),$$

ed inoltre non dipende dall'estensione u . □

Definizione 2. Per ogni $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo la **derivata radiale**

$$\partial_r u(x) := \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x).$$

Allora, per la definizione di gradiente tangenziale, abbiamo che

$$\nabla u(R\theta) = \theta \partial_r u(R\theta) + \frac{1}{R} \nabla_\theta u(R\theta).$$

Inoltre, vale la formula

$$|\nabla u|^2(R\theta) = |\partial_r u|^2(R\theta) + \frac{1}{R^2} |\nabla_\theta u|^2(R\theta),$$

per ogni $R > 0$ ed ogni $\theta \in \partial B_1$.

LO SPAZIO $H^1(\partial B_1)$

Definizione 3. $H^1(\partial B_1)$ è la chiusura di $C^\infty(\partial B_1)$ rispetto alla norma

$$\|\varphi\|_{H^1(\partial B_1)}^2 := \int_{\partial B_1} |\nabla_\theta \varphi|^2 d\theta + \int_{\partial B_1} \varphi^2(\theta) d\theta,$$

dove $d\theta$ indica la misura sulla sfera ∂B_1 . Lo spazio $H^1(\partial B_1)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$(u, v) \mapsto \int_{\partial B_1} (\nabla u_\theta \cdot \nabla v_\theta + uv) d\theta.$$

Teorema 4. Data una funzione misurabile $u : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}$, sono equivalenti:

- (i) $u \in H^1(\partial B_1)$;
- (ii) per ogni carta locale $\Phi : \Omega \rightarrow \partial B_1$, la funzione $u \circ \Phi$ è in $H^1(\Omega)$.

Teorema 5. L'inclusione $H^1(\partial B_1) \hookrightarrow L^2(\partial B_1)$ è compatta.

Teorema 6. Data una funzione $u \in H^1(\partial B_1)$, sono equivalenti:

- (i) u è costante;
- (ii) $\|\nabla_\theta u\|_{L^2(\partial B_1)} = 0$.

Teorema 7. Esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\int_{\partial B_1} u^2 d\theta \leq C_d \int_{\partial B_1} |\nabla_\theta u|^2 d\theta \quad \text{per ogni } u \in H^1(\partial B_1) \quad \text{tale che} \quad \int_{\partial B_1} u(\theta) d\theta = 0.$$

Corollario 8. Lo spazio

$$\mathcal{H} := \left\{ u \in H^1(\partial B_1) : \int_{\partial B_1} u(\theta) d\theta = 0 \right\}$$

è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$(u, v) \mapsto \int_{\partial B_1} \nabla u_\theta \cdot \nabla v_\theta d\theta.$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI DEL LAPLACIANO SFERICO

Per ogni funzione $f \in L^2(\partial B_1)$ esiste un'unica funzione $u \in \mathcal{H}$ tale che

$$\int_{\partial B_1} \nabla_\theta u \cdot \nabla_\theta v \, d\theta = \int_{\partial B_1} f(\theta) v(\theta) \, d\theta \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{H}.$$

La soluzione u è anche l'unico minimo del funzionale

$$\mathcal{H} \ni u \mapsto \frac{1}{2} \int_{\partial B_1} |\nabla_\theta u|^2 \, d\theta - \int_{\partial B_1} u f \, d\theta.$$

Inoltre, l'operatore

$$\mathcal{R} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad \text{dove} \quad \mathcal{L} := \left\{ u \in L^2(\partial B_1) : \int_{\partial B_1} u(\theta) \, d\theta = 0 \right\}$$

definito come

$$\mathcal{R}(f) := u$$

è un operatore lineare, continuo, simmetrico, positivo e compatto. Esiste quindi una successione di autofunzioni

$$\phi_n \in H^1(\partial B_1) \quad \text{tali che} \quad \int_{\partial B_1} \phi_n(\theta) \, d\theta = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_1} \phi_n^2 \, d\theta = 1$$

e autovalori

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

tali che per ogni n

$$-\Delta_{\partial B_1} \phi_n = \lambda_n \phi_n \quad \text{su } \partial B_1.$$

La famiglia di autofunzioni $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ è un sistema ortonormale completo dello spazio di Hilbert $L^2(\partial B_1)$, ovvero data una funzione

$$v \in \mathcal{L}$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$ converge in $L^2(\partial B_1)$ e

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \quad \text{fortemente in } L^2(\partial B_1),$$

dove a_n sono i coefficienti di Fourier

$$a_n := \int_{\partial B_1} \phi_n(\theta) v(\theta) \, d\theta.$$

Teorema 9. *Sia $u \in L^2(\partial B_1)$ una funzione tale che $\int_{\partial B_1} u(\theta) \, d\theta = 0$. Allora, sono equivalenti:*

- (i) $u \in H^1(\partial B_1)$;
- (ii) la serie $\sum_{n \geq 1} a_n \phi_n$ converge fortemente in $H^1(\partial B_1)$;
- (iii) la serie $\sum_{n \geq 1} a_n^2 \lambda_n$ converge.

ESTENSIONI OMOGENEE DI FUNZIONI DI SOBOLEV SULLA SFERA

Teorema 10. Per ogni $\phi \in H^1(\partial B_1)$ ed $\alpha \geq 0$, definiamo la funzione

$$u(r, \theta) = r^\alpha \phi(\theta).$$

Se

$$d > 2 \quad e \quad \alpha \geq 0 \quad oppure \quad d \geq 2 \quad e \quad \alpha > 0,$$

allora si ha che $u \in H^1(B_1)$ e

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx = \int_0^1 r^{d-3+2\alpha} \int_{\partial B_1} \left(\alpha^2 \phi^2(\theta) + |\nabla_\theta \phi|^2 \right) d\theta dr.$$

Dimostrazione. Basta dimostrare il teorema nel caso

$$\varphi \in C^\infty(\partial B_1)$$

e poi procedere per approssimazione. In questo caso abbiamo che

$$u \in L^2(B_1) \quad e \quad |\nabla u| \in L^2(\partial B_1),$$

dove il gradiente ∇u è definito (ed è C^∞) in ogni punto di $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Basta quindi verificare che $|\nabla u|$ è il gradiente debole (in senso $H^1(\mathbb{R}^d)$) di u . Prendiamo una funzione $w \in C_c^\infty(B_1)$ e calcoliamo

$$\int_{B_1} (w \partial_j u + u \partial_j w) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} (w \partial_j u + u \partial_j w) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \nu_j w u,$$

dove ν_j è la j -esima componente del vettore normale ν .

Ora, siccome $u(\varepsilon, \theta) = \varepsilon^\alpha \varphi(\theta)$ e w è limitata, abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \nu_j w u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon^{d-1+\alpha}) = 0. \quad \square$$

TRACCIA DI UNA FUNZIONE DI SOBOLEV SULLA SFERA

Teorema 11. Sia $u \in H^1(B_1)$. Allora, per Lebesgue quasi-ogni $r \in (0, 1)$ la funzione

$$\phi_r(\theta) := u(r\theta)$$

è in $H^1(\partial B_1)$.

Dimostrazione. Sia φ_n una successione di funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ che converge a u forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora, la successione φ_n è di Cauchy e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\varphi_n - u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n - u|^2 dx \geq \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\partial B_1} \left(|\varphi(r\theta) - u(r\theta)|^2 + \frac{1}{r^2} |\nabla_\theta(\varphi_n(r\theta) - u(r\theta))|^2 \right) d\theta dr.$$

Di conseguenza, a meno di estrarre una sottosuccessione, esiste un insieme $\mathcal{N} \subset (0, +\infty)$ di misura di Lebesgue (1D) nulla e tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_1} |\varphi(r\theta) - u(r\theta)|^2 d\theta = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_1} |\nabla_\theta(\varphi_n(r\theta) - u(r\theta))|^2 d\theta = 0,$$

per ogni $r \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$. $\square$

FUNZIONI ARMONICHE OMOGENEE

Proposizione 12. Date una funzione $\phi \in H^1(\partial B_1)$ ed un $\alpha > 0$, sono equivalenti:

- (i) la funzione $u(r, \theta) = r^\alpha \phi(\theta)$ è armonica in $\mathbb{R}^d$;
- (ii) la funzione ϕ è soluzione di

$$-\Delta_{\partial B_1} \phi = \lambda \phi \quad \text{su } \partial B_1,$$

dove

$$\lambda = \alpha(\alpha + d - 2).$$

Dimostrazione. Siano $\psi \in C^\infty(\partial B_1)$, $v(r, \theta) = r^\alpha \psi(\theta)$ e $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \cdot \nabla w \, dx &= \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\partial B_1} \left(\partial_r v \partial_r w + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta v \cdot \nabla_\theta w \right) d\theta \, dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\partial B_1} \left(\alpha r^{\alpha-1} \psi(\theta) \partial_r w(r\theta) + r^{\alpha-2} \nabla_\theta \psi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta) \right) d\theta \, dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} \int_{\partial B_1} \left(-\alpha(\alpha + d - 2) \psi(\theta) w(r\theta) + \nabla_\theta \psi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta) \right) d\theta \, dr. \end{aligned}$$

Ora, approssimando ϕ con funzioni C^∞ sulla sfera otteniamo

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} \int_{\partial B_1} \left(-\alpha(\alpha + d - 2) \phi(\theta) w(r\theta) + \nabla_\theta \phi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta) \right) d\theta \, dr.$$

Dimostriamo ora che (i) implica (ii). Scegliendo la funzione test w come

$$w(r, \theta) = \eta(\theta)g(r),$$

con $g \in C_c^\infty(0, +\infty)$ e $g \geq 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} \int_{\partial B_1} \left(-\alpha(\alpha + d - 2) \phi(\theta) g(r) \eta(\theta) + g(r) \nabla_\theta \phi(\theta) \cdot \nabla_\theta \eta(\theta) \right) d\theta \, dr \\ &= \int_0^{+\infty} r^{d+\alpha-3} g(r) \, dr \int_{\partial B_1} \left(-\alpha(\alpha + d - 2) \phi(\theta) \eta(\theta) + \nabla_\theta \phi(\theta) \cdot \nabla_\theta \eta(\theta) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\int_{\partial B_1} \left(-\alpha(\alpha + d - 2) \phi(\theta) \eta(\theta) + \nabla_\theta \phi(\theta) \cdot \nabla_\theta \eta(\theta) \right) d\theta = 0$$

e quindi, siccome la funzione test η è arbitraria, ϕ è soluzione debole di

$$(2) \quad -\Delta_{\partial B_1} \phi = \alpha(\alpha + d - 2) \phi.$$

Dimostriamo che (ii) implica (i). Se $\phi \in H^1(\partial B_1)$ è soluzione debole di (2), allora

$$\int_{\partial B_1} \left(-\alpha(\alpha + d - 2) \phi(\theta) w(r\theta) + \nabla_\theta \phi(\theta) \cdot \nabla_\theta w(r\theta) \right) d\theta,$$

per ogni funzione $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $r > 0$. Di conseguenza, usando (1), otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = 0.$$

□

Proposizione 13. Se u è una funzione armonica in $\mathbb{R}^d$ ed α -omogenea per un qualche $\alpha \geq 0$, allora u è un polinomio.

Dimostrazione. Segue dal fatto che le funzioni armoniche sono regolari.

□

Proposizione 14. Se $\phi \in H^1(\partial B_1)$ è un autofunzione del Laplaciano sferico con autovalore $\lambda > 0$, allora ϕ è la traccia di un polinomio e l'autovalore λ è della forma

$$\lambda = \alpha(\alpha + d - 2),$$

dove $\alpha \geq 0$ è un intero.

UNA FORMULA GENERALE PER LE FUNZIONI ARMONICHE IN B_1

Siano $\phi_n \in H^1(\partial B_1)$, $n \geq 1$, le autofunzioni del Laplaciano sferico e siano λ_n i corrispondenti autovalori ordinati in una successione crescente

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

Per ogni $n \geq 1$ definiamo $\alpha_n > 0$ come l'unico numero reale positivo tale che

$$\alpha_n(\alpha_n + d - 2) = \lambda_n.$$

Inoltre, poniamo anche

$$\alpha_0 = \lambda_0 = 0 \quad \text{e} \quad \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{d\omega_d}},$$

dove ω_d è il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$. Osserviamo che

$$\int_{\partial B_1} \phi_i(\theta) \phi_j(\theta) d\theta = \int_{\partial B_1} \nabla_\theta \phi_i \cdot \nabla_\theta \phi_j d\theta = 0 \quad \text{per ogni} \quad i \neq j.$$

Per ogni $n \geq 0$ definiamo il polinomio armonico omogeneo

$$h_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(r, \theta) = r^{\alpha_n} \phi_n(\theta),$$

e osserviamo che

$$\int_{B_1} \nabla h_i \cdot \nabla h_j dx = 0 \quad \text{per ogni} \quad i \neq j.$$

Lemma 15. *Sia $\phi \in H^1(\partial B_1)$ una funzione tale che*

$$\phi(\theta) = \sum_{k=0}^N c_k \phi_k(\theta),$$

Allora, la funzione armonica, soluzione di

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_1, \quad h = \phi \quad \text{su} \quad \partial B_1$$

è data da

$$h = \sum_{k=0}^N c_k h_k.$$

Inoltre,

$$\int_{B_1} |\nabla h|^2 dx = \sum_{n=1}^N c_n^2 \alpha_n.$$

Teorema 16. *Sia $\phi \in L^2(\partial B_1)$ e sia*

$$\phi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \phi_n(\theta),$$

il suo sviluppo in armoniche sferiche in $L^2(\partial B_1)$. Allora, sono equivalenti:

- (i) ϕ è la traccia di una funzione $u \in H^1(B_1)$;
- (ii) ϕ è la traccia di una funzione $h \in H^1(B_1)$ armonica in B_1 ;
- (iii) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \alpha_n$ converge.

Inoltre, la funzione armonica h del punto (ii) è data da

$$h = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n h_n,$$

dove la convergenza della serie è forte in $H^1(B_1)$ ed il suo integrale di Dirichlet è

$$\int_{B_1} |\nabla h|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \alpha_n.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Quindi, basta dimostrare che (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Possiamo supporre che $c_0 = 0$.

Dimostriamo che (iii) $\Rightarrow$ (ii). Consideriamo la traccia

$$p_n(\theta) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(\theta)$$

e la funzione armonica

$$H_n(\theta) = \sum_{k=1}^n c_k h_k.$$

Abbiamo che

$$\int_{B_1} |\nabla(H_n - H_m)|^2 dx = \sum_{k=m+1}^n c_k^2 \alpha_k.$$

Siccome H_n e H_m hanno media nulla su B_1 , per la disuguaglianza di Poincaré, abbiamo che la successione $(H_n)_n$ è di Cauchy in $H^1(B_1)$. Sia H il limite forte di H_n . In particolare, per il teorema della traccia,

$$T(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(H_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k \phi_k = \phi,$$

dove entrambi limiti sono forti in $L^2(\partial B_1)$ e dove $T(H)$ è la traccia di H su ∂B_1 .

Dimostriamo che (ii) $\Rightarrow$ (iii). Per ogni $r < 1$, consideriamo la funzione

$$h_r(x) = h(xr) \quad \text{per ogni } x \in B_1.$$

Allora:

- $h_r \in C^\infty(B_1)$ e la sua traccia su ∂B_1 è data da
- $$h_r(\theta) = h(r\theta), \quad h_r \in C^\infty(\partial B_1).$$
- Per $r \rightarrow 1$, h_r converge forte- $H^1(B_1)$ ad h , mentre le tracce $h_r : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ convergono forte- $L^2(\partial B_1)$ a ϕ (che per ipotesi è la traccia di h).
 - Siccome $h_r \in C^\infty$, abbiamo che la serie seguente converge:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle h_r, \phi_n \rangle^2 \alpha_n \quad \text{dove} \quad \langle h_r, \phi_n \rangle := \int_{\partial B_1} \phi_n(\theta) h_r(\theta) d\theta.$$

Ora, la convergenza della serie implica

$$\int_{B_1} |\nabla h_r|^2 dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle h_r, \phi_n \rangle^2 \alpha_n.$$

Di conseguenza, per ogni $N > 1$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^N c_n^2 \alpha_n = \sum_{k=1}^N \langle h, \phi_n \rangle^2 \alpha_n = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^N \langle h_r, \phi_n \rangle^2 \alpha_n \leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_{B_1} |\nabla h_r|^2 dx = \int_{B_1} |\nabla h|^2 dx. \quad \square$$

BIBLIOGRAFIA

Un testo dedicato allo studio degli spazi di Sobolev su varietà è il seguente.

[H] F. Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*. Courant Lecture Notes (2000).